НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

«На правах рукопису»
УДК 519.233.22

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ О. Л. Тимощук

«___»____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 124 Системний аналіз

на тему: «Оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку з використанням методів максимальної правдоподібності»

Виконала:
студентка ІІ курсу, групи КА-61м
Михальчук Галина Ігорівна ___________

Науковий керівник:
доцент кафедри ММСА,
к. ф.-м. н., доц. Каніовська І. Ю. ___________

Рецензент:
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
КПІ ім. Ігоря Сікорського
к. ф.-м. н., доц. Буценко Ю. П. ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) ______________

Київ
2018

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність (спеціалізація) – 124 «Системний аналіз» («Системний аналіз і управління»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О. Л. Тимощук

«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Михальчук Галині Ігорівні

1. Тема дисертації «Оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку з використанням методів максимальної правдоподібності», науковий керівник дисертації Каніовська Ірина Юріївна, канд. фіз.-мат. наук, доц., затверджені наказом по університету від «___»_________ 20__ р. №_____

2. Термін подання студентом дисертації ________________________________

3. Об’єкт дослідження: процес оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку.

4. Предмет дослідження: різноманітні методи максимальної правдоподібності, ризики, які виникають при здійсненні операцій на фондовому ринку, та способи роботи з ними

5. Перелік завдань, які потрібно розробити: дослідити історію фондового ринку, його інфраструктуру в наш час, основні операції, що здійснюються на фондовому ринку, та класичні методи аналізу фондових ринків, систематизувати інформацію про основні елементи, переваги та обмеження ризик-менеджменту, кількісні характеристики ризиків та підходи до роботи з ризиками, класифікувати ризики операцій на фондовому ринку, розглянути ММП в контексті різноманітних методів точкового оцінювання, їх переваги та недоліки, різні підходи до означення функції правдоподібності, дослідити

застосування параметричного VaR-підходу для оцінювання фінансових ризиків, дослідити за допомогою обчислення показника Херста, яку гіпотезу необхідно обрати для оцінювання ризиків (ефективного чи фрактального ринку), розробити програмний продукт для оцінювання основних кількісних характеристик ризиків операцій на фондовому ринку з використанням ММП, дослідити, як залежать точкові оцінки волатильності активів від ширини вікна, що використовується в ММП, провести порівняльний аналіз отриманих за різними методами оцінок, розробити стартап-проект, в якому використовується ідея оцінювання ризиків за допомогою ММП.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: приклад інструментів графічного аналізу, R/S-аналіз Херста, порівняння інтегральної та профільної ФП, графік частот процентної зміни денних цін закриття SPY, обчислення показника Херста, загальний вигляд вагової функції Джефрі та трикутної вагової функції, обчислення часу настання ризику, обчислення очікуваних та неочікуваних втрат, кореляційна матриця для фінансових інструментів, матриця коваріацій для обраного портфеля, оцінювання волатильності різними ММП, вигляд різноманітних ФП, зекономлений резервний капітал.

7. Орієнтовний перелік публікацій: «Застосування методів максимальної правдоподібності для точкового оцінювання у випадку біноміального розподілу», «Підходи до означення класичної функції правдоподібності та її модифікацій» («Нова освіта», 2016).

8. Дата видачі завдання ____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка

Студент Г. І. Михальчук

Науковий керівник дисертації І. Ю. Каніовська

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 158 с., 20 рис., 28 табл., 4 додатки, 24 джерела.

Тема: Оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку з використанням методів максимальної правдоподібності.

Об'єкт дослідження – процес оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку. Предмет дослідження – різноманітні методи максимальної правдоподібності, ризики, які виникають при здійсненні операцій на фондовому ринку, та способи роботи з ними.

Мета роботи – усунути несуттєвий параметр в оцінюванні ризиків на фондовій біржі з використанням ММП.

Методи дослідження – аналіз наукових робіт; експеримент (комп'ютерне моделювання); порівняння; формалізація; узагальнення та систематизація; статистичні методи.

Актуальність – результати роботи можуть бути використані для формування резервного капіталу для операцій на фондових ринках.

Запропоновано усунути несуттєвий параметр (математичне сподівання гаусівського розподілу) за допомогою ММП в оцінюванні фінансових ризиків з використанням параметричного VaR-підходу. Розроблено програмний продукт, який знаходить ймовірність ризику, час настання ризику, а також величину очікуваних та неочікуваних втрат. Використання ММП показує, що до чверті коштів з резервного капіталу, сформованого за класичним підходом, можуть бути вивільнені. Крім того, за рахунок підбору вагової функції можна врахувати апріорну інформацію, отриману в ході фундаментального та технічного аналізу.

ФОНДОВИЙ РИНОК, РИЗИК, МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ, ФУНКЦІЯ ПРАВДОПОДІБНОСТІ, НЕСУТТЄВИЙ ПАРАМЕТР, ВАГОВА ФУНКЦІЯ.

ABSTRACT

Master's dissertation: 158 p., 20 fig., 28 tabl., 2 appendixes, 24 sources.

Topic: Estimation of risks of trading in securities using maximum likelihood methods.

The object of study – the process of estimation of risks of trading in securities. Subject of research – different maximum likelihood methods, risks in trading in securities and ways to deal with them.

Purpose – eliminate nuisance parameter in estimation of risks in trading in securities using maximum likelihood methods.

Methods of research – analysis of scientific researches, experiment (computer modeling), comparison, formalization, generalization and systematization, statistical methods.

Actuality – results can be applied to formation of reserve capital in trading in securities.

It is suggested to eliminate nuisance parameter (expected value of normal distribution) using maximum likelihood methods in risk estimation throurh parametric VaR-method. Computer program is developed. It calculates probability of risk, value at risk and time of system guaranteed functionality.

Using of maximum likelihood methods shows that up to 25% of reserved capital formed by traditional method may become free. In addition, due to using of different weight functions prior information that was got from fundamental and technical analysis can be included into results.

STOCK MARKET, RISK, MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD, LIKELIHOOD FUNCTION, NUISANCE PARAMETER, WEIGHT FUNCTION.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ВВ – випадкова величина;

ГС – генеральна сукупність;

ДВВ – дискретна випадкова величина;

ММП – метод максимальної правдоподібності;

НВВ – неперервна випадкова величина;

ОМП – оцінка максимальної правдоподібності;

ПП – програмний продукт;

СЕ – стохастичний експеримент;

ФП – функція правдоподібності;

$\square$ – кінець прикладу;

$\triangleright$ – початок доведення;

$\triangleleft$ – кінець доведення;

$\propto$ – пропорційно.

ВСТУП

Актуальність дослідження. Щосекунди на фондових біржах світу здійснюються мільярди операцій. На ціни фінансових інструментів впливають сотні факторів, які постійно змінюються. Завжди існує можливість того, що на результат поточної операції вплине несприятливий фактор. Успішне виконання операцій в умовах наявності цих невизначених (іноді навіть неспостережуваних) факторів потребує ретельного аналізу та оцінювання ризиків. Основні кількісні характеристики ризику – ступінь (ймовірність), рівень (величина втрат) та ресурс допустимого ризику (час функціонування системи). Після оцінювання цих та інших характеристик ризику ОПР обирає підхід до роботи з ризиком, що може включати уникнення, передачу, пом’якшення, прийняття та ін.

Для оцінювання основних кількісних характеристик ризику існує VaR-підхід. Результатом застосування цього класичного підходу є впевненість з деяким довірчим рівнем, що впродовж деякого періоду часу втрати не перевищать деякого значення. Це обчислене значення формує резервний капітал, який повинен бути доступним для того, щоб покрити можливі збитки від операцій на фондовому ринку. Ці збитки може отримати як виконавець операції, так і клієнт інвестиційного фонду, який довірив свої кошти під управління компанії. В другому випадку питання своєчасного покривання збитків клієнта стає питанням збереження репутації компанії.

У VaR-підході обов’язковим є оцінювання волатильності кожного фінансового інструмента, що входить в інвестиційний портфель. Нормальний розподіл, окрім параметра, що оцінюється, – середньоквадратичного відхилення (волатильності), має несуттєвий параметр (математичне сподівання). Математичне сподівання – це параметр, який ми не оцінюємо, але який необхідно враховувати в оцінюванні волатильності. Для усунення цього несуттєвого параметра пропонується використовувати один із модифікованих ММП.

З огляду на це, вважаємо порушену проблему актуальною.

Об'єктом дослідження є процес оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку. Предметом дослідження є різноманітні методи максимальної правдоподібності, ризики, які виникають при здійсненні операцій на фондовому ринку, та способи роботи з ними.

Мета дослідження – усунути несуттєвий параметр в оцінюванні ризиків на фондовій біржі з використанням ММП. Для реалізації поставленої мети виконано наступні завдання:

1. Дослідити історію фондового ринку, його інфраструктуру в наш час, основні операції, що здійснюються на фондовому ринку, та класичні методи аналізу фондових ринків.

2. Систематизувати інформацію про основні елементи, переваги та обмеження ризик-менеджменту, кількісні характеристики ризиків та підходи до роботи з ризиками.

3. Класифікувати ризики операцій на фондовому ринку.

4. Розглянути ММП в контексті різноманітних методів точкового оцінювання, їх переваги та недоліки, різні підходи до означення функції правдоподібності.

5. Дослідити застосування параметричного VaR-підходу для оцінювання фінансових ризиків.

6. Дослідити за допомогою обчислення показника Херста, яку гіпотезу необхідно обрати для оцінювання ризиків (ефективного чи фрактального ринку).

7. Розробити програмний продукт для оцінювання основних кількісних характеристик ризиків операцій на фондовому ринку з використанням ММП.

8. Дослідити, як залежать точкові оцінки волатильності активів від ширини вікна, що використовується в ММП.

9. Провести порівняльний аналіз отриманих за різними методами оцінок.

10. Розробити стартап-проект, в якому використовується ідея оцінювання ризиків за допомогою ММП.

Методами дослідження є:

– аналіз наукових робіт, що пов’язані із фінансовими ризиками, VaR-підходом, фондовим ринком та ММП;

– синтез VaR-підходу та ММП;

– експеримент (комп’ютерне моделювання оцінювання ризиків інвестиційного портфеля);

– порівняння ММП в контексті їх застосування для вивільнення резервного капіталу;

– формалізація задачі оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку;

– узагальнення та систематизація відомостей про фондовий ринок, ризик-менеджмент, ММП, VaR-підхід.

Апробація результатів дисертації: ІІІ Міжнародна науково-практична конференція «Українська наука: проблеми сьогодення та перспективи розвитку» (29 – 30 липня 2016 р., м. Одеса).

Публікації: «Застосування методів максимальної правдоподібності для точкового оцінювання у випадку біноміального розподілу», «Підходи до означення класичної функції правдоподібності та її модифікацій» («Нова освіта», 2016).

Пояснювальна записка складається із п’яти розділів. У першому розділі структуризовано та систематизовано інформацію про оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку. Другий розділ присвячено дослідженню переваг та недоліків різноманітних ММП в контексті точкового оцінювання параметрів ГС. У третьому розділі за допомогою програмного продукту проаналізовано кількісні характеристики фінансових ризиків за допомогою

VaR-підходу. При цьому волатильність фінансових інструментів оцінюється п’ятьма методами – коваріаційно-варіаційним (класичним), максимізацією однорідної інтегральної ФП, інтегральної ФП Джефрі, профільної ФП та інтегральної ФП з трикутною ваговою функцією. У четвертому розділі розроблено стартап-проект.

РОЗДІЛ 1 ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ ОПЕРАЦІЙ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

1.1 Фондовий ринок

1.1.1 Історія фондового ринку

«Фінансовий ринок – це сукупність обмінно-перерозподільних відносин, пов'язаних з процесами купівлі та продажу фінансових ресурсів, необхідних для здійснення виробничої та фінансової діяльності» [1].

За видами фінансових активів фінансові ринки поділяються на кредитні, ринки цінних паперів, валютні, страхові ринки, ринки дорогоцінних металів та фінансових послуг.

Важливою складовою фінансового ринку є фондовий ринок (ринок цінних паперів). «Цінні папери — це грошові документи, які засвідчують право володіння і довготермінові зобов'язання елементів щодо виплати їхнім власникам доходів у вигляді дивідендів або відсотків, а також можливість передавання грошових та інших прав, що випливають з цих документів, іншим особам» [1]. Фондовий ринок – це частина фінансового ринку, де здійснюється емісія, купівля та продаж цінних паперів.

Історія фінансових ринків починається в 1285 році, коли була заснована перша біржа в Брюсселі. В наступні три століття біржі збирали в одне місце торговців, які купували та продавали контракти на товари. Але наприкінці 18го століття світовий торговий епіцентр переїхав до США, де розділився на 2 різні частини.

Першою частиною була торгівля акціями, що розвивалась на NYSE (New York Stock Exchange), заснованою в 1792. Згодом США переживали індустріальну революцію та швидкий ріст залізничних та нафтових компаній. Ці компанії потребували більше коштів для розвитку. Одним із джерел їх отримання був ринок акцій. Цей процес значною мірою залишився незмінним і сьогодні: компанії продають маленькі частини їхньої власності (які називаються акціями) інвесторам. Цей процес називають IPO (initial public offering). В майбутньому інвестори отримують частину прибутків компанії відповідно до акцій, які купили. Вони також можуть продати свої акції.

Сьогодні NYSE виступає як:

1. Джерело коштів для компаній з ідеями, таких як Twitter, Coca Cola, Exxon Mobil, AT&T, Procter&Gamble та ін.

2. Можливість для учасників ринку купувати та продавати їхні акції за справедливою вартістю.

3. Місце для взаємодії між людьми для забезпечення стабільності роботи.

Другою частиною була торгівля ф'ючерсами. Вона була розвинута в Чикаго на CME (Chicago Mercantile Exchange), де торгуються товарні ф'ючерси. Найбільш популярними є ф'ючерси на нафту, пшеницю, золото, сою, какао, цукор, апельсиновий сік. Товарний ф'ючерс є стандартним контрактом між двома сторонами на купівлю-продаж зазначеної кількості товару з зазначеною ціною, але поставкою у фіксований час у майбутньому, зазвичай через кілька місяців.

Ф'ючерсна торгівля ще зовсім нещодавно базувалася на відкритому аукціоні (open outcry). Це означає, що слова та сигнали руками учасників є реальними угодами. Сьогодні більше, ніж 99% угод здійснюється через електронну систему опрацювання заявок і більшість учасників працює через неї.

1.1.2 Інфраструктура та учасники фондового ринку в наш час

Відкритий аукціон надавав ліквідність для ф’ючерсів у Чикаго та акцій у Нью-Йорку впродовж двохста років і був найбільш ефективним і швидким шляхом для операцій на фінансових ринкахдо того, як торгівля почала ставати електронною. У 1971 році було засновано NASDAQ – повністю комп’ютеризована біржа акцій. У наступні кілька років були створені ECN (Electronic Communication Networks) – системи, де покупці та продавці розміщують їхні заявки. Найбільші ECN: ARCA, EDGX та BATS.

Після багатьох структурних змін, включаючи перехід з дробових цін на долари та центи, ринок акцій може бути представлений у вигляді кількох торгових майданчиків, з’єднаних в одному місці. Сьогодні існує дві великі біржі NYSE та NASDAQ, та близько десяти ECN, що постійно обмінюються інформацією з блискавичною швидкістю. Позитивним у цих змінах є те, що торгові операції стали швидшими та дешевшими для інвесторів та трейдерів. Проте розуміння впливу різних груп учасників на малих часових інтервалах суттєво ускладнилося.

Найбільшими учасниками фондового ринку є:

- індивідуальні інвестори;
- великі фінансові інституції – банки та хедж-фонди;
- спеціалісти NYSE;
- активні трейдери;
- високочастотні алгоритми - HFT (High Frequency Traders).

Індивідуальні інвестори купують акції компаній та утримують їх упродовж тривалого часу, отримуючи дивіденди. Головні інформаційні джерела для них – телебачення та фінансові сайти.

Великі банки та фонди – категорія учасників, що є найбільш інформованою стосовно майбутнього компаній. Вони працюють із позиціями великого об’єму. Інформаційні джерела для них – це власний інвестиційний аналіз макроекономічної ситуації, квартальні звіти компаній. Вони повільно купують (або продають) у спокійний час, і повільно закривають свої позиції впродовж руху ціни.

Спеціалісти та активні трейдери створюють ринкову ліквідність. Інвестори, банки та фонди потребують ліквідності щоб виконувати їх великі заявки за цінами, близькими до поточних. Такі заявки надсилаються на торговий поверх NYSE, де спеціалісти допомагають виконати всі заявки за найкращими цінами. Спеціалісти завжди присутні на торговому поверсі. Вони беруть участь у торговому процесі в якості покупців та продавців, коли пропозиція та попит не відповідають один одному (що зазвичай називають order imbalance).

Трейдери виконують схожу роботу, проте вони вільні у виборі однієї акції, яку вони торгують, або багатьох акцій одночасно. Вони купують або продають акцію, коли бачать дисбаланс у ній, і таким чином роблять ринок більш стабільним. Трейдери працюють у офісах та аналізують новини, графіки, потік ордерів, зв'язки між різними акціями.

В останні роки високочастотні комп'ютерні алгоритми (HFT) змінили багато аспектів ринку акцій. Вони потребують менш ніж одну соту частину секунди, щоб отримати інформацію, здійснити обчислення, надіслати та виконати заявку. Позитивний бік цих алгоритмів у тому, що вони виконують всю людську роботу, яка може бути алгоритмізована. Деякі HFT допомагають людям виконувати великі ордери краще. Проте, деякі алгоритми шкодять торговому середовищу – вони використовують перевагу у швидкості, щоб показати хибних покупців та продавців, значно зсунути ціну від справедливої, що іноді призводить до надлишкових падінь цін. З 2006 року кількість надісланих заявок зросла на кілька порядків, а кількість виконаних – залишилась порівняно на тому ж рівні. Це робить ринок менш прозорим та менш ефективним.

У сучасній економічній літературі розглядається широкий спектр фондових операцій, передік яких подано у додатку А.

1.1.3 Класичні методи аналізу фінансових ринків

Класичними методами аналізу фінансових ринків є фундаментальний та технічний аналіз, які доповнюють один одного.

Фундаментальний аналіз – це прогнозування цін фінансових активів на основі аналізу показників її діяльності. При цьому вивчаються звіти компанії, фінансові показники її діяльності (виручка, виплачувані дивіденди, чистий прибуток, боргові зобов'язання). Ціна акцій компанії залежить від попиту та пропозиції на ринку, проте фундаментальні показники, які вивчаються аналітиками, впливають на обсяг попиту та пропозиції, очікування учасників ринку.

Існує три рівні фундаментального аналізу: на рівні економіки, індустрії та окремої компанії. Перший рівень включає аналіз економічних індикаторів (ВВП, рівня безробіття) для оцінки стану ринку в цілому. На другому рівні вивчається попит та пропозиція та чинники, що на них впливають, для деякої групи схожих товарів чи послуг. Третій рівень включає виявлення чинників, які впливають на вартість окремої компанії (рівень продажів, бізнес-стратегія, рівень конкуренції).

При аналізі макроекономічних показників необхідно враховувати те, що деякі новини є плановими, а деякі – неочікуваними. Очікувані новини – це звіти компаній, публікації економічних показників на національному рівні, результати виборів, виступи політичних діячів. Неочікувані новини – стихійні лиха, політичні мітинги.

Безпосередньо впливають на ризик операцій на фондовому ринку економічні, політичні фактори, а також чутки, очікування учасників фондового ринку та форс-мажорні обставини.

Технічний аналіз – це прогнозування цін фінансових активів на основі їх цін у минулому. При цьому використовуються методи аналізу часових рядів.

Технічний аналіз базується на трьох постулатах, розроблених Чарльзом Доу: ринок враховує все, рух ринку підкорюється тенденціям, історія повторюється. Перший постулат говорить про те, що вся інформація, яка впливає на ціну, вже врахована в ній. Другий стверджує, що тенденції існують і вони не можуть змінюватися на протилежні без причини. Згідно з третім постулатом, те, що відбулося, може повторитися знову.

Існує два напрямки технічного аналізу – класичний (візуальний пошук закономірностей у рухах цін на графіках) та комп'ютерний (автоматизований аналіз значень цін на основі методів статистики).

Сьогодні розроблено безліч інструментів технічного аналізу. Деякі з них подано на рис. 1.1.

Рисунок 1.1 – Приклад інструментів технічного аналізу

1.2 Волатильність та математичне сподівання цін фінансових інструментів

Волатильність – міра мінливості ціни цінного папера на фондовому ринку. Це один із найважливіших показників, за яким оцінюються ризики операцій на фондовому ринку. Якщо актив характеризується високою волатильністю, то це означає, що за короткий проміжок часу ціна може сильно змінитися. Цей показник постійно змінюється. Серед факторів, що впливають на коливання ціни того чи іншого активу, – очікування гравців ринку, їх емоції, економічна та політична ситуація у країні, стихійні лиха, військові конфлікти, ліквідність інструменту. Тому з огляду на мінливість цих факторів, можна стверджувати, що періоди високої волатильності в загальному випадку змінюються періодами низької.

Математичне сподівання ціни також характеризується невизначеністю. На нього може впливати низка неспостережуваних та спостережуваних факторів, що змінюють напрямок тренду. Здебільшого, це значні фундаментальні новини на сам актив або на пов’язані із ним активи.

1.3 Гіпотези ефективного та фрактального ринку

Традиційна теорія ринку капіталу в значній мірі базувалася на справедливих азартних іграх. Думка про те, що гра на біржі може бути змодельована ймовірностями, берре свій початок у роботах Башельє 1900 року і продовжує використовуватись до сьогодні. Тривалий час існувала традиція розглядати курси цінних паперів з точки зору спекулянта – спосіб індивідуума отримати прибуток від цінних паперів шляхом прогнозування її майбутньої вартості до того, як це зроблять інші спекулянти. Таким чином, біржовий гравець вважає, що поточна ціна біржового папера вище або нижче, ніж майбутня, і відповідно продає або купує її за поточною ціною. У 1950-х роках Нобелівський лауреат Гаррі Марковіц представив своє розуміння того, що стандартне відхилення – це міра ризику, а коваріація прибутків може використовуватися для пояснення того, як диверсифікація (групування некорельованих або негативно корельованих акцій) зменшує ризик (стандартне відхилення портфеля).

Прирівнювання інвестицій до біржової гри продовжилось моделлю опціонного ціноутворення Блека-Шоулса та іншими теоріми на основі рівноваги.

Всі теорії, що базуються на таких припущеннях, належать до теорій ефективного ринку. Це означає, що ціни відображають всю поточну інформацію. Ринкові прибутки (зміни цін) вважаються нормально розподіленими на всіх інвестиційних горизонтах (короткостроковому, середньостроковому та довгостроковому).

Існує також інша гіпотеза – гіпотеза фрактального ринку. Вона підкреслює вплив ліквідності та інвестиційних горизонтів на поведінку інвесторів. Вона не накладає ніяких статистичних вимог на процес. На ринках існує діапазон статистичних розподілів за різними інвестиційними горизонтами. Паніка на одному горизонті може бути поглинута іншими як можливість для купівлі або продажу. Якщо весь ринок має один і той же інвестиційний горизонт, то він стає нестабільним, а нестача ліквідності перетворюється в паніку. Тоді в послідовності ціноутворення утворюються розриви. Для аналізу ринку у випадку прийняття такої гіпотези використовується фрактальна теорія.

Припущення гіпотези ефективного ринку про нормальний розподіл робиться на основі центральної граничної теореми, яка стверджує, що при проведенні все більшої й більшої кількості дослідів граничний розподіл випадкової системи буде нормальним. При цьому досліди повинні бути незалежними і однаково розподіленими.

В загальному випадку зміни цін на біржі не є незалежними і однаково розподіленими, тому потрібен метод, за яким можна визначити, яку із двох гіпотез прийняти. У 1951 році британський гідролог Херст опублікував роботу «Довгострокова місткість водосховища». В це дослідження Херст помістив багато природніх систем і подарував світу нову статистичну методологію для розрізнення випадкових і невипадкових систем. Цей метод називається методом нормованого розмаху або R/S-аналізом. Він використовується для розрізнення випадкового часового ряду і фрактального часового ряду.

Значення показника Херста визначається в термінах асимптотичної поведінки масштабованого діапазону як функції відрізка часу часового ряду наступним чином:

$$E\left(\frac{R(n)}{S(n)}\right) = Cn^{H}, n \to \infty$$

де *R(n)* – розмах перших *n* значень ряду, *S(n)* – стандартне відхилення, *E* – оператор математичного сподівання, *n* – величина проміжка часу (кількість точок у відрізку часового ряду), *C* – константа.

Діапазон збільшується згідно зі степенем – показником Херста. Це називається масштабуванням зі степеневою залежністю. Це характерна риса фракталів.

$H=0.5$ для незалежного випадкового процесу [1]. R/S-аналіз не вимагає, щоб основний процес був гаусівським. Якщо в результаті обчислення показника Херста отримано число 0.5, то з використанням ЦГТ для моделювання зміни цін можна використовувати гаусівський розподіл.

Послідовності, для яких $H>0.5$ вважаються персистентними. Персистентний часовий ряд характеризується ефектами довгострокової пам’яті. Те, що відбувається сьогодні, впливає на майбутнє. В термінах хаотичної динаміки відчувається суттєва залежність від початкових умов. Така довгострокова залежність має місце незалежно від масштабу часу.

При менших за 0.5 значеннях процес характеризується антиперзистентністю. Антиперзистентна система проходить меншу відстань, ніж випадкова система.

Цікаво, що значення показника Херста для більшості природніх процесів – 0.72 – 0.73. Це значення отримав сам Херст, досліджуючи дощ, річки, кільця на зрубах дерев та ін. (рис. 1.2).

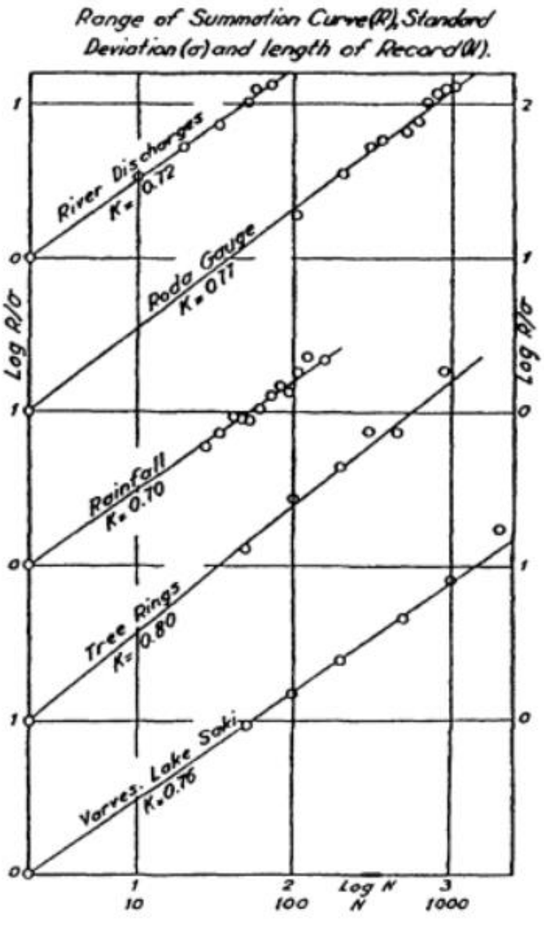

Рисунок 1.2 – R/S-аналіз Херста (1951 р.)

1.4 Аналіз та управління ризиками

Аналіз та управління ризиками має на меті визначити області невизначеностей, які можуть мати негативний вплив; проаналізувати і оцінити ці невизначеності; розробити шляхи роботи з ризиками та керувати цими шляхами.

Неправильне визначення і управління ризиками може негативно вплинути на наші рішення. Ризик-менеджмент включає визначення, аналіз і оцінку ризиків.

Якщо на проекті ще не розроблено достатніх правил контролю, то бізнес-аналітики розробляють плани уникнення, зменшення або модифікування ризиків і за необхідності імплементують їх у життя.

Ризик-менеджмент відбувається постійно, поки йде робота на проекті. Часті консультації та спілкування із зацікавленими особами допомагає як визначити нові ризики, так і слідкувати за вже визначеними ризиками.

У праці Згуровського М. З. Та Панкратової Н. Д. [2] виділяють наступні кількісні характеристики ризиків: ступінь, рівень ризику та ресурс допустимого ризику. **Ступінь ризику** – ймовірність появи небажаних наслідків впливу будь-яких факторів ризику в будь-який момент часу. **Рівень ризику** – величина втрат (наприклад, у грошовому еквіваленті) впливу будь-яких факторів ризику в будь-який момент часу. **Ресурс допустимого ризику** – час функціонування системи, впродовж якого ступінь та рівень ризику не перевищать деяких апріорно заданих допустимих значень.

1.4.1 Ідентифікація ризиків

Ризики виявляються через поєднання експертних суджень, вхідні дані зацікавлених осіб, експерименти, минулий досвід, історичний аналіз схожих ініціатив і ситуацій. Метою є визначити зрозумілий набір релевантних ризиків, а також мінімізувати невідомі ризики.

Процес ідентифікації ризиків відбувається постійно.

Ризикова подія може статися один раз, декілька разів або не статися. Умова ризику може бути як однією, так і комбінацією умов.

Одна подія або умова може мати декілька наслідків, і один наслідок може бути спричинений кількома різними подіями або умовами.

Кожен ризик може бути описаний у реєстрі ризиків. Такий реєстр допомагає аналізувати ризики і планувати рішення. У реєстр ризиків вноситься наступна інформація:

1. Ризикова подія або умова.
2. Наслідки: описуються впливом на потенційний результат (вигоду). Вплив може бути описаний грошовими втратами, тривалістю процесу, масштабом виробництва, якістю готового продукту або будь-якими погодженими між зацікавленими особами факторами: репутацією, відповідністю корпоративним нормам, соціальною відповідальністю.
3. Початкові кількісні характеристики ризику (ступінь, рівень ризику та ресурс допустимого ризику).
4. План модифікації ризику.
5. Відповідальна особа за виконання плану модифікації ризику.
6. Кількісні характеристики залишкового ризику (характеристики ризику після виконання плану модифікації ризику).

1.4.2 Аналіз та оцінка ризиків

Аналіз ризику включає в себе розуміння ризику та оцінку його кількісних характеристик.

Іноді в компанії вже є деякі правила роботи з ризиками. Ці правила мають бути враховані під час аналізу.

Компанія може мати стандартну, або базову шкалу впливу ризиків. Для таких категорій, як грошові витрати, зусилля і репутація, можна регулювати гранично допустимі значення для того, щоб визначити потенційну вигоду і прийнятний рівень ризику.

Зазвичай для того, щоб описати, яким чином інтерпретувати потенційний вплив ризику, використовують від 3 до 5 широких категорій.

Ризики пріоритезуються згідно з їх рівнем. Ризикам, які можуть статися скоро, логічно давати вищий пріоритет, аніж тим, які можуть статися пізніше. Також вищий пріоритет можна надати ризикам, які можуть мати значний вплив на репутацію або на дотримання законодавчих норм.

Результати аналізу ризиків порівнюються з потенційною вигодою від зміни рішення, щоб визначити, чи прийнятним є рівень ризику.

Загальний рівень ризику визначається як сума всіх рівнів ризиків.

1.4.3 Підходи до роботи з ризиками

Деякі ризики можуть бути прийнятними, для деяких потрібно вжити заходів для їх мінімізації.

Для роботи з ризиками можна використовувати один із наступних підходів (або їх комбінацію):

1. Уникнення – видалити джерело ризику або змінити плани так, аби впевнитись, що ризикова ситуація не станеться.

2. Передача – відповідальність за роботу з ризиком передається або розділяється з третіми особами.

3. Пом’якшення – зменшити ймовірність виникнення ризику або можливих негативних наслідків його появи.

4. Прийняття – прийняття рішення нічого не робити з ризиком. Якщо ризикова подія станеться, то розробити обхідний шлях.

5. Збільшення – прийняття рішення взяти на себе більше ризиків, щоб отримати більше можливостей.

Після того, як обрано підхід для роботи з ризиком, розробляється план відповіді на виникнення ризикової події. Цей план віддається відповідальній особі.

У випадку уникнення ризику відповідальна особа вживає заходів для того, щоб переконатися, що ймовірність або вплив ризику зменшується до нуля. Для тих ризиків, які не можуть бути зменшені до нуля, відповідальна особа здійснює моніторинг та імплементування плану пом’якшення та відповіді на ризик.

В ході роботи відбувається повторний аналіз ризиків, щоб визначити залишковий ризик з новою ймовірністю та новим впливом.

Залишковий ризик – це результат вживання заходів для модифікації ризику.

Для того, щоб визначити, чи варто вживати заходів модифікації ризиків, потрібно провести аналіз витрат і вигод. Цей аналіз показує, чи достатньо зменшується рівень ризику з урахуванням витрат грошей і зусиль.

Після цього аналізу ризик має бути переоцінений в термінах залишкового ризику.

Зацікавлених осіб потрібно обов’язково проінформувати про плани модифікації ризиків.

1.4.4 Переваги і обмеження застосування ризик-менеджменту

Серед переваг:

1. Може бути застосований до стратегічних ризиків, які впливають на довгострокову вигоду, до тактичних ризиків, що впливають на вигоду від змін, та до оперативних ризиків, що впливають на вигоду від рішень після того, як зміни було здійснено.

2. Організація часто стикається зі схожими проблемами у різних ініціативах. Успішні відповіді на ризики на одній ініціативі можуть слугувати корисними уроками для інших ініціатив.

3. Рівень ризику зміни або рішення може час від часу змінюватися. Постійний ризик-менеджмент допомагає визначити ці зміни, преоцінити ризики і правильність запланованих відповідей.

У застосуванні ризик-менеджменту також існують деякі обмеження:

1. Кількість можливих ризиків у більшості ініціатив часто буває настільки великою, що керувати всіма ними стає неможливо. В такому разі керують тільки деякою підмножиною потенційних ризиків.

2. Завжди залишається ймовірність, що важливі ризики не було виявлено.

1.5 Класифікація ризиків операцій на фондовому ринку у наукових працях

Існує три напрямки діяльності суб'єктів господарювання: операційна (основна діяльність), фінансова (залучення коштів у результаті фінансових операцій) та інвестиційна (вкладення коштів з метою отримання доходу).

Якщо суб'єкт господарювання випускає свої цінні папери на фондовий ринок, це є прикладом фінансової діяльності, якщо він сам виступає інвестором, купуючи цінні папери, то це є прикладом інвестиційної діяльності. В обох випадках операціям на фондовому ринку притаманні ризики. Фінансові та інвестиційні ризики – це комплексна економічна категорія, що визначає настання втрат запланованих фінансових результатів через несприятливі події в умовах невизначеності та ринкових коливань.

Як зазначає Я. Д. Вішняков у праці «Загальна теорія ризиків», «ризик притаманний будь-якій сфері людської діяльності, що пов'язано з безліччю умов і чинників», які впливають на кінцевий результат прийнятих рішень. Ризик недоотримання запланованих результатів почав особливо проявлятися при товарно-грошових операціях, конкуренції учасників господарської діяльності. З виникненням і розвитком ринкової економіки з'являються різноманітні теорії ризику. Одним із перших розглянув проблеми економічних ризиків американський економіст А. Маршалл, праці якого поклали початок неокласичній теорії ризиків. Американський економіст М. Кейнс визначив зміст поняття «схильність до ризику», характеризуючи інвестиційні ризики та ризики господарювання, а також запропонував одну з найперших класифікацій ризиків. Американський економіст Ф. Найт у праці «Ризик, невизначеність і прибуток» вперше припустив, що ризик є кількісною характеристикою невизначеності. Американські математики О. Моргенштерн та Дж. Нейман у своїх працях встановили зв'язок понять «невизначеність» і «ризик», надавши їм математичного трактування. Іншими основними моментами в розвитку теорії ризиків є: розробка теорії управління портфельними інвестиціями американського економіста Г. Марковіца [3], праця Ф. Модельяні з теорії інвестицій, дослідження Н. Блейка та М. Шолса щодо фінансових опціонів. З плином часу і розвитком економічних систем змінювалося й трактування поняття ризику. Фінансові ризики, у свою чергу, незалежно від їх конкретного походження й характеру ризикогенного середовища, є безпосереднім наслідком фінансових відносин та операцій. В економічній фаховій літературі пропонуються різноманітні підходи до визначення фінансових ризиків.

Л. Гітман трактує дане поняття як ступінь невизначеності, що пов’язана із комбінацією запозичених і власних коштів, які використовуються для фінансування компанії чи власності. Ю. Брігхем акцентує, що фінансовий ризик – це ризик, пов’язаний із застосуванням фінансового левериджу в господарській діяльності. Ч. Ф. Лі та Дж. І. Фіннерті наголошують, що фінансовий ризик – це «неспроможність підприємства обслуговувати власні зобов’язання перед третіми особами» [4], а також ймовірність оголошення його банкрутом. Л. О. Коваленко та Л. М. Ремньова вважають, що фінансові ризики виникають у випадках, коли «підприємства вступають у відносини з різними фінансовими інститутами», зокрема, банками, інвестиційними, страховими, факторинговими, лізинговими компаніями, біржами тощо. А. М. Поддєрьогін зазначає, що формування фінансового ризику притаманне «усім господарським операціям, які реалізуються в межах фінансової діяльності». М. В. Гридчина вважає, що «фінансові ризики – це ризики підприємницької діяльності, які характеризуються ймовірністю втрат фінансових ресурсів (грошових коштів)». В. Г. Бабенко та В. Я. Плаксієнко розуміють під фінансовим ризиком випадковий характер формування фінансових потоків, які виникають під час функціонування суб’єкта.

Чимало авторів ототожнює поняття фінансового ризику з ризиками підприємницької діяльності чи комерційними ризиками, що значною мірою звужує економічний зміст поняття. Для надання змістовного й обґрунтованого визначення поняття доцільно сформувати комплексну класифікацію фінансових ризиків. Так, Р. Брейлі розподіляє фінансові ризики на: індивідуальний ризик, коли йдеться про володіння одним видом акцій; ринковий ризик, коли йдеться про володіння портфелем цінних паперів. А.М. Поддєрьогін поділяє фінансові ризики на валютні, кредитні та інвестиційні.

Дослідник визначає валютний ризик як «можливість фінансових втрат у результаті зміни курсу валют, що може відбутися в період між висновком контракту і фактичних розрахунків за ним». Кредитний ризик пов'язаний із «можливістю невиконання фінансових зобов'язань перед інвестором у результаті використання для фінансування діяльності зовнішньої позики».

Інвестиційний ризик пов'язаний із специфікою вкладення коштів у різноманітні проекти. У фінансово-економічній літературі часто під інвестиційними припускаються ризики, пов'язані з вкладенням коштів у цінні папери. Так, В.В. Бочаров трактує інвестиційний ризик як зниження прибутковості портфельних інвестицій [5].

У праці [4] наведено наступні види інвестиційних ризиків:

1. «Капітальний – загальний ризик на всі інвестиційні вкладення, ризик того, що інвестор не зможе визволити інвестовані засоби, не зазнавши втрат» [4].

2. Селективний – ризик неправильного вибору об’єкта для інвестування порівняно з іншими варіантами.

3. Відсотковий – ризик втрат, що можуть зазнати інвестори у зв’язку зі змінами відсоткових ставок на ринку.

4. Державний – ризик втрат у зв’язку із вкладенням коштів у підприємства, що перебувають під юрисдикцією країни з хитким соціальним і економічним становищем.

5. Операційний (технічний) – ризик втрат, що виникають у зв’язку зі збоями в роботі комп’ютерних систем при опрацюванні інформації, пов’язаної з інвестуванням засобів.

6. Тимчасовий – ризик інвестування засобів у невідповідний час, що неминуче приводить до втрат.

7. «Ризик законодавчих змін – втрати від непередбаченого законодавчого регулювання» [4].

8. «Ризик ліквідності – ризик, пов'язаний із можливістю втрат при реалізації цінних паперів через зміну оцінки їх якості» [4]. На первинному ринку – це незатребуваність цінних паперів, що приводить до їх нерозміщення. На вторинному – це зниження передбачуваної ціни реалізації.

9. Інфляційний – ризик того, що за високого рівня інфляції прибутки, одержані від інвестованих коштів, знеціняться швидше, ніж зростуть.

У праці І.А. Бланка додаються ще певні категорії фінансових ризиків, а саме: інноваційний фінансовий ризик (пов'язаний із запровадженням нових фінансових технологій, використанням нових фінансових інструментів тощо); криміногенний ризик; інші ризики («форс-мажор», емісійний ризик тощо) [6].

Кожен із наведених видів ризиків можна віднести до систематичного або несистематичного ризику. Систематичний ризик – несприятливі події для ринку цінних паперів у цілому, не пов'язаний із конкретним цінним папером (наприклад, інфляційний, ризик законодавчих змін, відсотковий). Він «представляє собою загальний ризик на всі вкладення в цінні папери» [6]. Несистематична категорія ризиків пов'язана із особливостями кожного конкретного цінного папера (зокрема, кредитний, селективний, технічний, ризик ліквідності).

1.6 VAR-підхід для оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку

При здійсненні операцій на фондовому ринку необхідно оцінити ризики (як очікувані, так і неочікувані) і зрозуміти, який резервний капітал потрібно затвердити. Також важливо розуміти, протягом якого періоду часу і з якою ймовірністю величина наших втрат буде знаходитися в межах резервного капіталу.

Далі з урахуванням ризиків можна оцінити реальну доходність наших операцій, а також установити ліміт втрат, після якого необхідно виходити з позиції.

Для визначення цих показників використаємо VaR-підхід (Value at Risk).

VaR (англ. Value at Risk) – величина резервного капіталу, яка з деякою ймовірністю перекриє можливі втрати протягом деякого періоду.

VaR-підхід дозволяє з деяким довірчим рівнем визначити верхню межу втрат, що виникають в результаті настання ризикових подій:

$$P\left\{Loss_t\left(k\right) < VaR_t\left(k\right)\right\} = \frac{100-\alpha}{100},$$

де $Loss_t\left(k\right)$ – фактичні втрати на момент часу t за період k днів, $VaR_t\left(k\right)$ – прогнозовані втрати на момент часу t за період k днів, α – довірчий рівень.

Існує два основних підходи для обчислення VaR: параметричний (VaR оцінюється за параметрами, які характеризують ціновий ряд) та непараметричний (обчислюється за історичними значеннями доходності портфеля або за методом Монте-Карло).

Формула для обчислення параметричної величини VaR:

$$VaR_t\left(k\right) = \alpha\sigma \cdot ВП \cdot \sqrt{N},$$

де α – квантиль довірчого інтервалу, σ – волатильність (норма мінливості), ВП – відкрита позиція, N – період прогнозу.

Для нормального розподілу існують таблиці, за якими можна знайти відповідні квантилі.

Волатильність найчастіше оцінюють як середньоквадратичне відхилення. При цьому VaR-підхід називають варіаційно-коваріаційним.

Існують також інші підходи до оцінювання волатильності (експоненційно згладжена волатильність, GARCH-волатильність).

Середнє значення VaR називають очікуваними втратами (estimated loss, EL). Різниця між максимальним значенням VaR та очікуваними втратами – неочікувані втрати.

VaR-підхід можна використовувати для оцінювання величини резервного капіталу, оцінювання доходності операцій з урахуванням ризиків, встановлення обмежень, за яких необхідно закривати позицію, моделювання сценаріїв розвитку.

Цей підхід дозволяє уникнути недоліків інших методів оцінювання ризиків:

– неможливість агрегування (зведення до спільного показника);

– неможливість виміряти величину резервного капіталу, який покриває втрати, спричинені факторами ризику;

– недостатньо можливостей для контролю рівня ризику за допомогою введення обмежень.

У VaR-підходу є деякі обмеження:

– недостатньо враховуються можливі великі втрати, що можуть виникнути з малими ймовірностями;

– недооцінювання ризику у випадку «товстих хвостів» моделі;

– неоднозначність: сума VaR підпортфелів може виявитися меншою за VaR портфеля.

Висновки до розділу 1

Розділ 1 присвячено структуризації та систематизації інформації про фондовий ринок, аналіз та управління ризиками. Розглянуто, які ризики існують при здійсненні операцій на фондовому ринку та як відбувається процес їх оцінювання.

Сьогодні на фондовому ринку відбувається величезна кількість операцій. Класичні методи аналізу, які при цьому застосовуються, – це фундаментальний та технічний аналіз.

У ризик-менеджменті виокремлюються наступні етапи: ідентифікація ризиків, їх аналіз та оцінка. Після цього обирається один із наступних підходів (або їх комбінація): уникнення, передача, пом’якшення, прийняття чи збільшення. При оцінюванні фінансових ризиків важливими для розгляду є наступні кількісні характеристики: ступінь (ймовірність появи небажаних наслідків), рівень ризику (величина збитків) та ресурс допустимого ризику (час функціонування системи, за якого ступінь та рівень ризику не перевищать деяких апріорно заданих допустимих значень).

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ В КОНТЕКСТІ РІЗНОМАНІТНИХ ПІДХОДІВ ДО ТОЧКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ

2.1 Ключові поняття

Нехай задано ймовірнісний простір стохастичного експерименту (СЕ) $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, де Ω – простір елементарних подій, F – введена на ньому алгебра (або σ-алгебра) подій, Р – відповідна ймовірнісна міра. Можливість задання такого простору випливає з аксіом теорії ймовірностей Колмогорова.

Кількісною характеристикою результату СЕ є випадкова величина (ВВ). Випадковою величиною будемо називати вимірну функцію:

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to R,$$

причому

$$\forall A \subset \mathrm{B}(R) \ \ X^{-1}(A) \subset F,$$

де $\mathrm{B}(R)$ – борелівська σ-алгебра на R.

ВВ називають дискретною, якщо вона приймає скінченну або зліченну множину значень:

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$
$$P\{\xi = x_i\} = p_i$$

ВВ називають неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною, диференційовною майже скрізь, за винятком, можливо, окремих ізольованих точок. Під функцією розподілу ВВ будемо розуміти дійснозначну функцію одного дійсного аргументу вигляду:

$$F_{\xi}\left(x\right)=P\left\{\omega:\xi\left(\omega\right)<x\right\},$$

причому

$$\forall x\in R: A=\left\{\omega:\xi\left(\omega\right)<x\right\}\in F.$$

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини (НВВ) називається границя вигляду [7]:

$$f_{\xi}\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left\{x\leq\xi<x+\Delta x\right\}}{\Delta x},$$

якщо вона існує.

З означення щільності випливає, що

$$f_{\xi}\left(x\right)=F_{\xi}'\left(x\right).$$

Математичним сподіванням ВВ ξ називають інтеграл Стільтьєса [7]:

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_{\xi}\left(x\right).$$

Якщо ξ – ДВВ, то

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P\left(\xi = x_k\right).$$

Якщо ξ – НВВ, то

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}\left(x\right) dx.$$

Якщо інтеграл не збігається абсолютно, то кажуть, що ВВ ξ не має математичного сподівання.

Числовою характеристикою, що задає міру розсіювання ВВ навколо математичного сподівання, є дисперсія. Дисперсією називають [7]:

$$D\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E\xi\right)^2 dF_{\xi}\left(x\right).$$

Якщо ξ – ДВВ, то

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - E\xi\right)^2 P\left(\xi = x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P\left(\xi = x_k\right) - \left(E\xi\right)^2.$$

Якщо ξ – НВВ, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E\xi\right)^2 f_{\xi}\left(x\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}\left(x\right) dx - \left(E\xi\right)^2.$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – випадкові величини. Випадковим вектором називають вимірну векторну функцію:

$$\vec{\xi} = \left(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega)\right) : \Omega \to R^n,$$

причому

$$\forall \vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in R^n : A = \left\{\omega \middle| \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, ..., \xi_n(\omega) < x_n\right\} \in F .$$

Для подальших міркувань необхідне поняття попарної незалежності та незалежності у сукупності. Дві події A і B називають незалежними, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Події $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ називають попарно незалежними, якщо

$$\forall i, j : i \neq j$$
$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P\left(A_i\right) P\left(A_j\right)$$

Події $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ називають незалежними у сукупності, якщо

$$\forall k \in \{2, ..., n\} \forall i_1, i_2, ..., i_k :$$
$$P\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right) = \prod_{r=1}^{k} P\left(A_{i_r}\right)$$

Дві ВВ ξ_1 та ξ_2 називають незалежними, якщо події $A_1 = \left\{\omega : \xi_1\left(\omega\right) < x_1\right\}$ та $A_2 = \left\{\omega : \xi_2\left(\omega\right) < x_2\right\}$ для $\forall x_1, x_2 \in R$ є незалежними.

Поняття попарної незалежності та незалежності у сукупності для n ВВ вводиться аналогічно.

У математичній статистиці ВВ вивчаються за дослідними даними.

ВВ ξ або її значення, що досліджується, називається генеральною сукупністю (ГС).

Вибірка (випадкова) – це випадковий вектор

$$\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right),$$

всі координати якого розподілені, як ГС ξ, яку ми вивчаємо, і незалежні у сукупності. Кількість координат вектора n називають обсягом вибірки.

Реалізація вибірки – це всі вектори

$$\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in G \subseteq R^n,$$

де G – вибірковий простір. Конкретною реалізацією вибірки називають вектор

$$\overrightarrow{x^0} = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in G.$$

Приклад 2.1 Нехай задано ГС

$$\xi \in Bin\left(4, \frac{1}{2}\right).$$

Тоді випадкова вибірка:

$$\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right),$$

де

$$\forall i \in \left\{1, \ldots, \mathrm{n}\right\} : \xi_i \in Bin\left(4, \frac{1}{2}\right), \ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ -$$

незалежні у сукупності.

Реалізація вибірки:

$$\forall \vec{x} \in G = \left[0,1,2,3,4\right]^{\times n}.$$

Конкретною реалізацією, наприклад, може бути наступний вектор (при n=7):

$$\overrightarrow{x^0} = \left(4,4,3,0,1,2,1\right).$$

2.2 Поняття апріорної та апостеріорної ймовірності

Події $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in F$ утворюють повну групу подій СЕ [7] тоді й тільки тоді, коли

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \text{ і } A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i, j:\ i \neq j.$$

Нехай

$$H_1,\ H_2,\ \dots,\ H_n \in F$$

утворюють повну групу подій деякого СЕ. $H_1,\ H_2,\ \dots,\ H_n$ – гіпотези. Нехай подія A відбувається з однією чи кількома гіпотезами.

Ймовірність події A визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i),$$

де $P(A / H_i)$ – умовна ймовірність події A за умовою H_i.

Ймовірності гіпотез

$$P(H_i),\ i = \overrightarrow{1,\mathrm{n}},$$

що обчислюються до проведення СЕ, називають апріорними.

Розглянемо теорему Байєса, що є ключовим елементом байєсівського підходу.

Нехай в результаті СЕ відбулася подія A. Це впливає на ймовірність гіпотез наступним чином [8]:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A / H_k)}.$$

Ймовірності $P\left(H_i / A\right)$ називають апостеріорними.

Теорема Байєса представляє собою механізм для оновлення ступеня впевненості в тому, що відбудеться подія H_i у світлі нової інформації стосовно події A, що стосується H_i. Первинна (апріорна) інформація $P\left(H_i\right)$ замінюється уточненою $P\left(H_i / A\right)$.

Апостеріорній ймовірності відповідає апостеріорна щільність, яка містить у собі апріорну та вибіркову інформацію.

2.3 Точкове оцінювання параметрів генеральної сукупності

Нехай задано ГС ξ та її закон розподілу з невідомими параметрами. Розглянемо випадкову вибірку $\vec{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$ та конкретну реалізацію вибірки (дослідні дані) $\overrightarrow{x^0}=\left(x_1^0,x_2^0,...,\mathrm{x}_n^0\right)$.

Будь-яка функція від випадкової вибірки $\vec{\xi}$ називається статистикою.

Точковою оцінкою параметра θ є статистика

$$\theta^*=\theta^*\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right),$$

значення якої знайдено по конкретній реалізації вибірки і береться за наближене значення невідомого параметра:

$$\theta_{зн}^*=\theta^*\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)\approx\theta.$$

Розглянемо вимоги, що висуваються до точкових оцінок: незміщеність, консистентність та ефективність.

Точкова оцінка $\theta^* = \theta^*\left(\vec{\xi}\right)$ є незміщеною оцінкою параметра θ, якщо

$$E\theta^* = \theta.$$

Якщо

$$E\theta^* = \theta + a\left(\theta\right),$$

то θ^* називають зміщеною оцінкою параметра θ, $a\left(\theta\right)$ називають зсувом.

Розглянемо точкову оцінку θ^* як функцію, що залежить від обсягу вибірки:

$$\theta_n^* = \theta^*\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right).$$

Точкова оцінка θ_n^* є консистентною, якщо

$$\theta_n^* \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Для незміщених оцінок існує наступний критерій консистентності, що випливає з нерівності Чебишева: якщо

$$D\theta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то θ_n^* – консистентна оцінка.

Нехай Θ – множина всіх незміщених оцінок параметра θ.

Точкова оцінка $\overset{*}{\theta} \in \Theta$ називається ефективною, якщо

$$D\overset{*}{\theta} = \min_{\theta_i^* \in \Theta} D\theta_i^* .$$

Критерій перевірки ефективності для незміщених оцінок: якщо

$$\frac{\partial \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{\xi},\theta\right)}{\partial \theta} = C\left(n,\theta\right)\left(\theta^*\left(\vec{\xi}\right) - \theta\right),$$

то θ_n^* є ефективною оцінкою.

Однією із основних характеристик оцінки $\theta\left(\vec{\xi}\right)$ параметра θ є середньоквадратична похибка [9]:

$$СКП\left(\theta\right)=E\left(\theta\left(\vec{\xi}\right)-\theta\right)^2.$$

Цю величину часто використовують як основу для порівняння різноманітних оцінок.

2.4 Методи максимальної правдоподібності

ММП в математичній статистиці – це методи точкового оцінювання невідомих параметрів розподілу шляхом максимізації функції правдоподібності. Всі вони базуються на припущенні, що вся інформація про статистичну вибірку знаходиться в цій функції.

ММП були проаналізовані, рекомендовані і значним чином популяризовані Р. Фішером у 1912 – 1922 рр. у праці «Про математичні основи теоретичної статистики». У цій статті вперше було використано термін «метод максимальної правдоподібності». Проте раніше ММП використовували у своїх працях Гаусс та Лаплас.

В роботі згадується класичний ММП та модифіковані ММП, що використовуються у випадку, якщо існують параметри, що мають бути оцінені, та несуттєві параметри – ті, які ми не оцінюємо, в тому числі і неспостережувані (зовнішні впливи, майбутні спостереження тощо), але які мають бути враховані в аналізі. Несуттєві параметри потрібно усунути з розгляду, не втративши інформації, що потрібна для оцінювання.

Серед модифікованих ФП виділяють широкий клас інтегральних та профільних ФП, що усувають несуттєві параметри за допомогою відповідно інтегрування та максимізації, умовні та маргінальні ФП (окремі випадки часткових ФП).

2.4.1 Поняття функції правдоподібності

Перш за все, необхідно зрозуміти ідею появи ФП, яка зараз активно використовується при знаходженні точкових оцінок багатьма дослідниками.

Уявимо, що ми стали свідком стохастичного експерименту – підкидання монети 10 разів. Нехай в результаті цього випробування монета впала догори гербом 10 разів. У свідків такого випробування, очевидно, виникне сумнів, чи справжньою є ця монета (чи справді на одному боці в неї аверс, а на іншому – герб, чи справді вона зроблена з однорідного сплаву, чи справді людина, що підкидала монету, робила це чесно). Звичайно, такий результат СЕ не є неможливим, але він викликає сумнів у людини, яка за цим спостерігає.

Для того, щоб описати, наскільки правдоподібним є результат СЕ у кожному конкретному випадку, було введено ФП, що набуває більших значень при більш правдоподібних дослідних даних.

До того, як термін «функція правдоподібності» почав розглядатися у математичній статистиці, його використовували в юриспруденції та комерції.

Надалі будемо розглядати деяку ГС ξ, відповідну випадкову вибірку $\vec{\xi}=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$ та конкретну реалізацію: $\vec{x}=\left(x_1,x_2,...,\mathrm{x}_n\right)$ (якщо не вказано інше).

Функція розподілу $\vec{\xi}$:

$$F_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}\right)=P\left(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,...,\xi_n<x_n\right)=\prod_{k=1}^{n}P\left(\xi_k<x_k\right)=\prod_{k=1}^{n}F_{\vec{\xi}}\left(x_k\right)$$

Якщо ГС ξ – дискретна, то

$$P\left(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, ..., \xi_n = x_n\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\xi_k = x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\xi = x_k\right)$$

Якщо ГС ξ – неперервна, то

$$f_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}\right) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}\left(x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi}\left(x_k\right)$$

Функцією правдоподібності (ФП) називають функцію $L: G \to R$, що для дискретних ГС ξ має вигляд:

$$L\left(\vec{x}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\xi = x_k\right),$$

а для неперервних ГС ξ:

$$L\left(\vec{x}\right) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi}\left(x_k\right).$$

Приклад 2.2 Нехай $\xi \in Poiss\left(a\right)$. Тоді $\forall \vec{x} \in \left(N \cup \left\{0\right\}\right)^{\times n}$:

$$L\left(\vec{x}, a\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a^{x_k}}{x_k!} e^{-a} = \frac{a^{\sum_{k=1}^{n} x_k}}{\prod_{k=1}^{n} x_k!} e^{-na}.$$

Нехай $\xi \in N\left(a,\sigma^2\right)$. Тоді $\forall \vec{x} \in R^n$:

$$L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(x_k-a\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}$$

2.4.2 Класичний метод максимальної правдоподібності

Суть класичного ММП полягає в тому, що в якості точкової оцінки невідомого параметра θ вибирають таку статистику, при якій ФП ГС набуває максимального значення:

$$L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta^*_{зн}\right)=\max_{\theta}L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right).$$

Часто задля спрощення обчислень від ФП $L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right)$ переходять до логарифмічної ФП $\ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right)$. Доведемо коректність цього переходу.

Лема 1 Якщо

$$\forall x:\ f\left(x\right)>0,$$

x_0 – точка глобального максимума функції $f\left(x\right)$, то x_0 – точка глобального максимума функції $\ln f\left(x\right)$.

$\triangleright$ Зафіксуємо довільний $x \neq x_0$. Оскільки x_0 – точка глобального максимума, то

$$0 < f(x) \leq f(x_0).$$

Дослідимо функцію $\ln(y)$, $y > 0$.

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} > 0 \ \ \forall y > 0.$$

Отже, $\ln(y)$ – монотонно зростаюча на $(0, +\infty)$. Тому

$$0 < f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \ln(f(x)) \leq \ln(f(x_0)).$$

Оскільки x – довільний, то лему доведено. $\triangleleft$

Отже, алгоритм точкового оцінювання класичним ММП полягає в наступному:

1) Розв'язуємо рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}, \theta\right)}{\partial \theta} = 0$$

відносно θ. Отримуємо стаціонарні точки $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K$.

2) Підставляємо $\theta = \theta_i$, $i = \overline{1, K}$ у наступний вираз: $\dfrac{\partial^2 \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}, \theta\right)}{\partial \theta^2}$.

Якщо

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_i} < 0,$$

то θ_i є точкою локального максимума.

3) Якщо точка локального максимума єдина, то $\theta^*_{зн}$ дорівнює цій точці. Якщо їх є декілька, то підставити всі точки локального максимума у логарифмічну ФП $\ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right)$. Та точка, в якій $\ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\theta\right)$ набуває найбільшого значення, буде шуканим значенням оцінки невідомого параметра $\theta^*_{зн}$.

Якщо невідомих параметрів, які треба оцінити, є декілька, то розв'язується система рівнянь правдоподібності. Далі аналогічним чином обчислюються значення оцінок невідомих параметрів.

Приклад 2.3 Нехай $\xi \in \Gamma\left(2,\beta\right)$. Знайдемо точкову оцінку параметра β класичним ММП.

$$f_{\xi}\left(x\right) = x^{2-1}\frac{e^{-x/\beta}}{\Gamma\left(2\right)\beta^2} = x\beta^{-2}e^{-x\beta^{-1}};$$

$$L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\beta\right) = \prod_{k=1}^{n} x_k\beta^{-2}e^{-x_k\beta^{-1}} = \beta^{-2n}e^{-\beta^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}\prod_{k=1}^{n}x_k;$$

$$\ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\beta\right) = -2n\ln\beta - \beta^{-1}\sum_{k=1}^{n}x_k + \sum_{k=1}^{n}\ln x_k;$$

$$\frac{\partial \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\beta\right)}{\partial\beta} = -2n\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{k=1}^{n}x_k = 0;$$

Введемо позначення:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k ,\ \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k .$$

$$\beta = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{\overline{x}}{2} \ -$$

стаціонарна точка.

$$\frac{\partial^2 \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\beta\right)}{\partial \beta^2} = 2n\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3}\sum_{k=1}^{n} x_k ;$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L_{\vec{\xi}}\left(\vec{x},\beta\right)}{\partial \beta^2}\right|_{\beta=\beta} = 2n\frac{4}{\overline{x}^2} - \frac{2\cdot 8}{\overline{x}^3}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{8n}{\overline{x}^2} - \frac{16n}{\overline{x}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k}\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{8n}{\overline{x}^2} < 0 .$$

Отже,

$$\beta^*_{зн} = \frac{\overline{x}}{2},$$

шукана оцінка:

$$\beta^* = \frac{\overline{\xi}}{2} . \square$$

Введемо позначення: θ – параметр, оцінка якого має бути знайдена, λ – несуттєвий параметр, який ми не оцінюємо, але враховуємо, оцінюючи θ.

Часто буває так, що ОМП параметра θ, що оцінюється, виявляється інваріантною відносно несуттєвого параметра [9].

Дійсно, нехай

$$\lambda\left(\vec{x},\theta\right)=\arg\max_{\lambda} L\left(\vec{x},\lambda|\theta\right) -$$

значення умовної ОМП параметра λ за умовою θ.

Якщо виконано рівність:

$$f_{\xi}\left(x+c,\theta,\lambda\right)=f_{\xi}\left(x,\theta,\lambda-c\right) \ \ \forall c,$$

то легко перевірити, що

$$\lambda\left(\left(x_1+c,...,x_n+c\right),\theta\right)=\lambda\left(\vec{x},\theta\right)+c \ \ \forall c,$$

$$\theta_0\left(\left(x_1+c,...,x_n+c\right)\right)=\theta_0\left(\vec{x}\right) \ \ \forall c.$$

Якщо виконано:

$$f_{\xi}\left(cx,\theta,\lambda\right)=\frac{1}{c}f_{\xi}\left(x,\theta,\frac{\lambda}{c}\right) \ \ \forall c>0,$$

то

$$\lambda\left(c\vec{x},\theta\right)=c\lambda\left(\vec{x},\theta\right) \ \forall c>0 \text{ і } \theta_0\left(c\vec{x}\right)=\theta_0\left(\vec{x}\right) \ \ \forall c>0.$$

Відомо, що в загальному випадку ОМП $\theta_0\left(\vec{x}\right)$ не є незміщеною оцінкою параметра θ. Проте вона часто є асимптотично незміщеною, тобто при граничному переході $n \to \infty$ допускає представлення у наступному вигляді:

$$E\left(\theta_0\left(\vec{x}\right)\right) - \theta = \frac{b(\theta)}{n} + O\left(n^{-2}\right),$$

Вираз $\frac{b(\theta)}{n}$ називають зміщенням першого порядку оцінки $\theta_0\left(\vec{x}\right)$.

Це питання досліджувалося у працях Кокса і Снелла (1968) та Фірса (1993).

2.4.3 Модифіковані методи максимальної правдоподібності

Існує багато способів усунення несуттєвого параметра λ для отримання модифікованої ФП, що залежить тільки від θ. Один із таких способів – інтегрування ФП за мірою Лебега. Таким чином можна отримати однорідну інтегральну ФП:

$$L^U\left(\vec{x},\theta\right) = \int L\left(\vec{x},\theta,\lambda\right) d\lambda .$$

Альтернативний метод – представлення несуттєвих параметрів у вигляді функцій від параметрів, що оцінюються. Ця процедура називається концентрацією параметрів. Часто отриману функцію (яку називають концентрованою, максимізованою або профільною) буває простіше максимізувати, щоб отримати оцінку параметра.

Надалі профільною функцією правдоподібності будемо називати наступну функцію:

$$\hat{L}\left(\vec{x},\theta\right)=\sup_{\lambda} L\left(\vec{x},\theta,\lambda\right).$$

Зазвичай супремум досягається в деякій точці λ_θ, що називається умовною оцінкою максимальної правдоподібності (ОМП).

Лема 2.2 Нехай дано $f\left(x\right)$, $\alpha = const > 0$, $\beta = const$, x_0 – точка максимума функції $f\left(x\right)$. Тоді x_0 – точка максимума функції $\alpha f\left(x\right)+\beta$.

$$\rhd\ f\left(x_0\right)>f\left(x\right)\Rightarrow \alpha f\left(x_0\right)>\alpha f\left(x\right)\Rightarrow \alpha f\left(x_0\right)+\beta>\alpha f\left(x\right)+\beta\ .\lhd$$

Лема 2.2 показує, що при точковому оцінюванні методами максимальної правдоподібності можна не враховувати в обчисленнях константи пропорційності (додатні константи, що множаться на вираз, який максимізується), а також будь-які константи, які додаються до нього.

Приклад 2.4 $\xi \in N\left(a,\sigma^2\right)$ – ГС. Нехай потрібно оцінити параметр σ^2, несуттєвий параметр – a. (В наших позначеннях: $\theta=\sigma^2$, $\lambda=a$).

Тоді однорідна інтегральна ФП [10]:

$$L^U\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\int L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)da=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\int e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}da=$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{(n-1)/2}\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\bar{x}\right)^2\right);$$

а профільна ФП має наступний вигляд [10]:

$$L\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\sup_a L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)=L\left(\vec{x},\overline{x},\sigma^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right).$$

Зауважимо, що $\overline{x}$ – умовна ОМП (оцінка несуттєвого параметра, яку не потрібно шукати).

Оскільки при максимізації ми не враховуємо константи пропорційності, то $L^U\left(\vec{x},\sigma^2\right)$ і $L\left(\vec{x},\sigma^2\right)$ відрізняються тільки степенями σ^2 у знаменниках. □

Розглянемо інтегральну ФП в загальному вигляді:

$$L\left(\vec{x},\theta\right)=\int L\left(\vec{x},\theta,\lambda\right)\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)d\lambda,$$

де $\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)$ – вагова функція (це умовна апріорна щільність λ за умовою θ).

Ваговою функцією називають математичну конструкцію, що використовується при підсумовуванні, інтегруванні або усередненні з метою додавання деяким елементам більшої ваги у результуючому значенні в порівнянні з іншими елементами. $\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)$ називають апріорною (лат. a – від, prior – попередній), тому що ця функція описує наявні знання про параметр λ перед тим, як проводяться спостереження і отримуються дослідні дані (конкретна реалізація вибірки). Те, що $\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)$ – умовна за умовою θ, означає, що функція містить в собі інформацію про λ у припущенні, що параметр θ відомий.

Введемо позначення: $\pi(\theta)$ – апріорна щільність θ, $\pi(\lambda)$ – (маргінальна) апріорна щільність λ.

$\pi(\theta)$ описує знання про параметр θ, які є перед проведенням спостереження. $\pi(\lambda)$ є маргінальною, тому що λ – несуттєвий параметр і не розглядається окремо, а тільки враховується при оцінці θ (тобто «маргінальний» в даному випадку має значення «несуттєвий», «нецентральний»).

Часто вибирають $\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$, якщо λ – параметр шкали, $\pi(\lambda)\equiv 1$, якщо λ – параметр розміщення. Питання вибору вагової функції досліджено у статті Бергера, Лісео і Волперта [11].

Всі модифіковані функції правдоподібності досліджуються так само, як і класична – знаходиться точка максимума функції, яка береться за значення точкової оцінки невідомого параметра.

2.4.4 Підходи до означення функції правдоподібності

У праці Баярі, Дегрута та Кадана [12] висловлено думку, що єдиного визначення функції правдоподібності не може існувати. Вони відхилили як неповне загальноприйняте визначення Саваджа (1976) “probability or density of the observation as a function of the parameter”. Таке визначення не пояснює, як трактувати неспостережувані величини (наприклад, майбутні спостереження $\vec{z}$).

Якщо розглядати ФП $L\left(\vec{x}\middle|\theta,\vec{z}\right)$ як умовну за умови $\vec{z}$, як ми робимо з невідомими параметрами, то ФП запропоновано називати спостережуваною. Якщо розглядати $\vec{z}$ як інші спостереження $\vec{x}$, то ми отримаємо випадково змінювану ФП $L\left(\vec{x},\vec{z}\middle|\theta\right)$. Зауважимо, що таке позначення означає, що зліва від вертикальної риски знаходяться те, що може змінюватися в залежності від результатів дослідів, а справа – все, що фіксується і припускається вже знайденим. У цій праці стверджується, що статистичні висновки, зокрема, точкові оцінки параметрів, будуть залежати від цього вибору.

У статті [11] запропоновано наступне уникнення цієї проблеми. Можна розглядати спеціальну ФП у вигляді: $L\left(\vec{x},\theta^*,\lambda^*\middle|\theta,\lambda\right)$, де $\vec{x}$ – спостережувані дані, а θ^* і λ^* – неспостережувані дані: величини, що оцінюються, та несуттєві величини відповідно.

θ^* може включати в себе майбутні спостереження z, або деякі випадкові ефекти, які оцінюються. Величини зліва від лінії – з відомим розподілом, справа – з невідомим.

Згідно з рекомендацією Батлера [13], можна негайно видалити (інтегруванням) несуттєвий параметр λ^*:

$$L\left(\vec{x},\theta^*\middle|\theta,\lambda\right)=\int L\left(\vec{x},\theta^*,\lambda^*\middle|\theta,\lambda\right)d\lambda^*.$$

У такому вигляді можна досліджувати ФП та усувати несуттєвий параметр λ.

Приклад 2.5 $\xi_i \in N\left(\mu_i, 1\right)$ – незалежні у сукупності випадкові величини. μ_i – неспостережувані, незалежні у сукупності, $\mu_i \in N\left(\alpha, \tau^2\right)$. Необхідно оцінити $\vec{\theta} = \left(\alpha, \tau^2\right)$, несуттєвий параметр –

$$\overrightarrow{\lambda^*} = \vec{\mu} = \left(\mu_1, ..., \mu_n\right).$$

В даному прикладі немає θ^* і λ.

Маємо:

$$L\left(\vec{x}, \overrightarrow{\lambda^*} \middle| \vec{\theta}\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{N(\mu_i,1)}\left(x_i\right) f_{N\left(\alpha,\tau^2\right)}\left(\mu_i\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(x_i - \mu_i\right)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\left(\mu_i - \alpha\right)^2}{2\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\tau\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_i\right)^2 - \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i - \alpha\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\tau\right)^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 - \frac{2\alpha}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \frac{n\alpha}{\tau^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\tau\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n\alpha}{\tau^2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(2x_i + \frac{2\alpha}{\tau^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right)\right]\right\};$$

$$L\left(\vec{x}, \vec{\theta}\right) = \int L\left(\vec{x}, \overrightarrow{\lambda^*} \middle| \vec{\theta}\right) d\overrightarrow{\lambda^*} =$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\tau\right)^n} \int_{R^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n\alpha}{\tau^2}\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(x_i + \frac{\alpha}{\tau^2}\right) + \right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\Bigg]\Bigg\}d\mu_1 d\mu_2 ... d\mu_n=\left(2\pi\left(1+\tau^2\right)\right)^{-n/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\alpha\right)^2}{2\left(1+\tau^2\right)}\right)\propto$$

$$\propto\left(1+\tau^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{n\left(s^2+\left(\overline{x}-\alpha\right)^2\right)}{2\left(1+\tau^2\right)}\right),$$

де

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,,\ s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2.$$

Якщо усунути $\overrightarrow{\lambda^*}$, використовуючи профільну ФП, то отримаємо:

$$L\left(\vec{x},\vec{\theta}\right)=\sup_{\vec{\mu}\in R^n}\left(\frac{1}{\left(2\pi\tau\right)^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_i\right)^2-\frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i-\alpha\right)^2\right)\right)=$$

$$=\left(4\pi^2\tau^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\alpha\right)^2}{2\left(1+\tau^2\right)}\right)\propto\tau^{-n}\exp\left[-\frac{n\left(s^2+\left(\overline{x}-\alpha\right)^2\right)}{2\left(1+\tau^2\right)}\right].$$

Бачимо, що профільна ФП відрізняється від інтегральної тим, що вона має особливу точку в $\tau=0$ (вона дорівнює $+\infty$ в цій точці). Тому використовуючи профільну ФП, можна зробити хибний висновок, що незалежно від конкретної реалізації вибірки значення точкової оцінки $\left(\tau^2\right)^*_{зн}=0$. Цей приклад підтверджує, що будь-який результат обчислень обов’язково необхідно перевіряти на адекватність.

У таких ситуаціях рекомендовано використовувати ненульову точку локального максимума ФП, якщо вона існує. У цьому прикладі: якщо $s^2<4$, то локального максимума профільної ФП не існує, а навіть якщо $s^2 \geq 4$, то точка локального максимума не буде консистентною оцінкою τ^2. Наприклад, якщо $\tau^2 = 3$, то локальний максимум функції буде збігатися до 1, а не до 3 при обсязі вибірки $n \to \infty$.

Побудуємо на координатній площині графіки $L\left(\tau^2\right)$ і $L\left(\tau^2\right)$ при $n = 6$, $s^2 = 4$ у припущенні, що $\overline{x} = \alpha$ (рис. 2.1). Синім кольором позначено $L\left(\tau^2\right)$, а червоним – $L\left(\tau^2\right)$. Бачимо, що точка глобального максимума для інтегральної ФП існує і легко знаходиться програмними засобами, а при максимізації профільної ФП виникають проблеми в точці 0. □

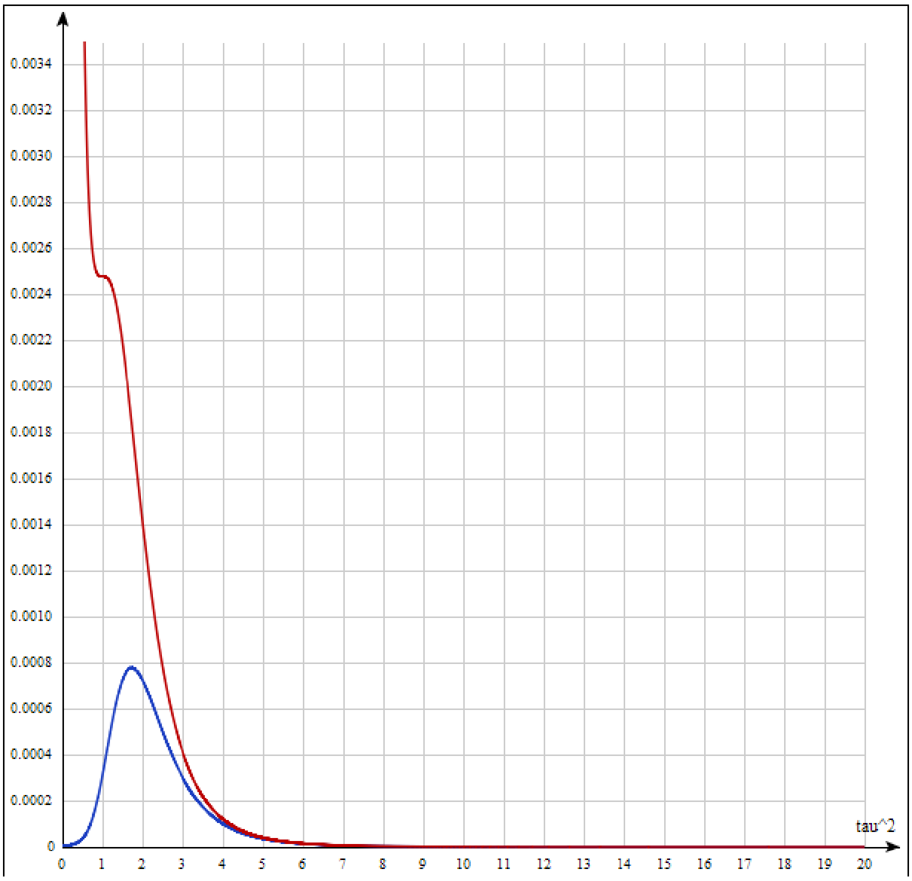

Рисунок 2.1 – Інтегральна та профільна ФП

2.5 Методи максимальної правдоподібності в наукових працях

Усунення несуттєвих параметрів – важлива і складна проблема у задачах статистики. В XIX ст. школа Байєса-Лапласа (згадана у праці Забелла 1989 р. [14]) розглядала використання однорідної інтегральої ФП як очевидне для всіх випадків – питання вибору доречної ФП не розглядалося. Цю проблему почали формально розглядати тільки починаючи з XX ст.

Представники іншої школи (частотного підходу) Фішер та Нейман не використовували методів Байєса-Лапласа, шукаючи альтернативні шляхи усунення несуттєвих параметрів. Одними із перших прикладів такого підходу були праці Фішера 1915 та 1921 року (основні положення описані у [14]).

Для того, щоб розглянути цей приклад, необхідно зрозуміти теорему Кокрана і дати означення наступним розподілам.

Нехай $\xi_i \in N\left(\mathrm{a}_i, \sigma_i^2\right)$, $i = \overrightarrow{1,\mathrm{n}}$ – незалежні у сукупності ВВ. Тоді кажуть, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i - a_i}{\sigma_i}\right)^2 \in \chi_n^2$$

(має розподіл χ^2 з n степенями свободи),

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i - a_i}{\sigma_i}\right)^2} \in \chi_n$$

(має розподіл χ з n степенями свободи).

Нехай $\xi \in N\left(0,1\right)$, $\eta \in \chi_n$ – незалежні ВВ. Тоді кажуть, що

$$\frac{\sqrt{n}\xi}{\eta} \in St(n)$$

(розподілена за законом Стьюдента з n степенями свободи).

Теорема 2.1 (Кокрана) [15] Нехай випадкові величини

$$\xi_i \in N(\eta_i, 1),\ i = \overrightarrow{1,\mathrm{n}},$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \xi_i^2 = Q_1 + \ldots + Q_s,$$

де Q_i – квадратичні форми від змінних $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ рангу n_i, $i = \overrightarrow{1,\mathrm{s}}$.

Це означає, Q_i є сумою квадратів лінійних комбінацій ξ_i. Ранг Q_i інтерпретується як ранг матриці $B^{(i)}$ з елементами $B_{j,k}^{(i)}$ у представленні Q_i як квадратичної форми, тобто

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_j B_{j,k}^{(i)} U_k .$$

Тоді $Q_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_s$ будуть мати незалежний нецентральний (тобто з ненульовим математичним сподіванням) χ^2-розподіл з $n_1, \mathrm{n}_2, \ldots, \mathrm{n}_s$ степенями свободи відповідно тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = n .$$

Доведення цієї теореми подано у праці Сидняєва та Андрейцевої [15].

Приклад 2.6 Нехай $\xi \in N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

$$\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \ -$$

вибіркове середнє,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \overline{\xi}_n\right)^2 \ -$$

незміщена оцінка дисперсії. За теоремою Кокрана, можна показати, що

$$V = \left(n-1\right)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \in \chi_\nu^2,$$

де $\nu = n-1$.

Легко зрозуміти, що

$$Z = \left(\overline{\xi}_n - \mu\right)\frac{\sqrt{n}}{S_n} \in N\left(0,1\right),$$

оскільки $\overline{\xi}_n \in N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Більше того, можна показати, що Z і V – незалежні.

Тому

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} = \left(\bar{\xi}_n - \mu\right)\frac{\sqrt{n}}{S_n}$$

має розподіл Стьюдента.

Цей приклад був доведений Фішером у 1925 р.

Бачимо, що розподіл T не залежить від μ або σ, а тільки від ν. Отже, несуттєві параметри було усунено без використання однорідної інтегральної ФП. □

Інші відомі приклади – тест на гомогенність (однорідність) дисперсій Бартлетта (1937) та різноманітні розв'язання проблеми Беренса-Фішера (1935). Тест на гомогенність дисперсій для кількох вибірок означає перевірку гіпотези про рівність дисперсій. Критерій Бартлетта є параметричним, він побудований на додатковому припущенні про нормальність вибірок. Проблема Беренса-Фішера – статистична задача порівняння математичних сподівань у двох нормальних розподілах, дисперсії яких невідомі (припускається, що відношення дисперсій також невідоме).

У статтях Бернарда, Дженкінса і Вінстона (1962) розглянуто численні підходи використання ФП з метою усунення несуттєвих параметрів. Калбфлейш і Спротт у 1970 та 1974 рр. [16]. систематизували різноманітні ММП і відкрили шлях до нових досліджень у цій галузі.

Одним із найпростіших методів є використання профільної ФП, але в багатьох випадках такий підхід призводить до неправильних висновків (як у прикладі 1.5). Різноманітні приклади таких труднощів у працях Неймана і Скотта (1948), Круддаса, Кокса та Рейда (1989) дали поштовх до виникнення різноманітних змінених профільних ФП, наприклад, модифікована профільна ФП Барндорфа-Ніелсена [17] та умовна профільна ФП Кокса та Рейда (1987). Інший шлях модифікації профільної ФП базується на дослідженні властивостей спеціальної функції, що визначає, наскільки чутлива ФП до змін її параметрів (робота Маккулага та Тібшірані у 1990 р.).

Погляди представників байєсівського підходу відображено у працях Рейда (1995, 1996), Фразера та Рейда (1989), Світтінга (1995, 1996).

Під час пошуків нових методів усунення несуттєвих параметрів науковці зверталися до маргінальних та умовних ФП, що залежать тільки від параметра, що оцінюється, θ і не залежать від несуттєвих параметрів. У роботі Базу 1977 року [18] подано приклад, у якому використання маргінальної та умовної ФП в однакових умовах давали різні результати, що суперечили один одному.

Маргінальні та умовні ФП – це окремі випадки часткової ФП, яку детально розглядав Кокс у 1975 р. [19]. Якщо існує така декомпозиція дослідних даних $x = (y, z)$, що

$$f(x|\theta,\lambda) = h(x) f_1(y|\theta,\lambda) f_2(z|y,\theta)$$

або

$$f(x|\theta,\lambda) = h(x) f_1(y|\theta) f_2(z|y,\theta,\lambda),$$

то множники $h(x) f_1(y|\theta,\lambda)$ у першому випадку або $h(x) f_2(z|y,\theta,\lambda)$ у другому ігноруються, а множник, що залишився, розглядається як часткова ФП. Оскільки відкинуті множники залежать від θ, то при такому підході існує втрата інформації.

Зауважимо, що інтегральну ФП також іноді називають маргінальною ФП, але в нашій роботі ми не будемо використовувати цей термін.

З точки зору представників байєсівської школи, проблема усунення несуттєвих параметрів має тривіальне розв'язання: проінтегрувати апостеріорну ФП за несуттєвими параметрами і працювати з апостеріорною ФП, що залежить тільки від θ. Проте на практиці існує значна складність впровадження такого методу, зумовлена тим, що знайти апріорний розподіл кількох параметрів буває непросто. Особливо це стосується несуттєвих параметрів, вибір та інтерпретація яких часто неоднозначна.

2.6 Переваги використання інтегральної функції правдоподібності

2.6.1 Інтегрування в порівнянні з максимізацією

Більшість неінтегральних методів базується на максимізації по несуттєвих параметрах. Наведемо приклади, коли такий підхід, на відміну від використання інтегральної ФП, не працює.

У наступному прикладі профільну ФП застосовувати не можна.

Приклад 2.7 Нехай

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in N(\theta, 1),\ \eta \in N\left(\lambda, \exp\left(-n\theta^2\right)\right) -$$

незалежні у сукупності ВВ. Параметри θ і λ – невідомі. Потрібно оцінити параметр θ, λ – несуттєвий параметр.

Класична ФП має наступний вигляд:

$$L\left(\vec{x}, y, \theta, \lambda\right) = f\left(x, y \middle| \theta, \lambda\right) = \left(2\pi\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta\right)^2\right)\left(2\pi \exp\left(-n\theta^2\right)\right)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{\left(y-\lambda\right)^2}{2\exp\left(-n\theta^2\right)}\right) = \left(2\pi\right)^{-(n+1)/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}\theta\right) - \frac{\left(y-\lambda\right)^2}{2\exp\left(-n\theta^2\right)}\right),$$

де $\overline{x}$ – вибіркове середнє.

Профільна ФП має вигляд [20]:

$$L\left(\vec{x}, y, \theta\right) = f\left(x, y \middle| \theta, \mathrm{y}\right) = \left(2\pi\right)^{-(n+1)/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}\theta\right)\right) \propto \exp\left(n\overline{x}\theta\right).$$

Ми отримали ФП, що швидко прямує до нескінченності, коли $\theta \to +\infty$ або $\theta \to -\infty$ (в залежності від знаку вибіркового середнього). Зрозуміло, що робити точкову оцінку параметра θ, максимізуючи таку функцію, не можна.

Тепер розглянемо однорідну інтегральну ФП [20]:

$$L^U\left(\vec{x}, y, \theta\right) = \int f\left(\vec{x}, y \middle| \theta, \lambda\right) d\lambda \propto \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x} - \theta\right)^2\right).$$

Дослідимо цю функцію на наявність максимума.

Введемо позначення:

$$\mathrm{g}(\theta) = \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x} - \theta\right)^2\right).$$

$$g'(\theta)=\exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right)\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot 2\left(\overline{x}-\theta\right)\cdot(-1)=\exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right)\cdot n\left(\overline{x}-\theta\right)=0.$$

Єдина стаціонарна точка:

$$\theta=\overline{x}.$$

Покажемо, що вона є точкою максимума.

$$g''(\theta)=n\left[\exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right)\cdot(-1)+\left(\overline{x}-\theta\right)\left(\exp\left(-\frac{n}{2}\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right)\right)'_{\theta}\right].$$

$$g''\left(\overline{x}\right)=n\left[1\cdot(-1)+0\right]=-n<0.$$

Отже, $\theta=\overline{x}$ – точка максимума однорідної інтегральної ФП.

Тому, на відміну від профільної ФП, однорідну інтегральну ФП можна застосовувати для точкового оцінювання параметра θ.

В цьому прикладі інтегральний підхід можна застосувати по-іншому. Проінтегрувавши $f\left(\vec{x},y\middle|\theta,\lambda\right)$ по y, можна отримати маргінальну ФП, що не залежить від λ. Звичайно, в цьому випадку можуть виникнути сумніви з приводу правильності отриманої оцінки, адже при переході до маргінальної ФП втрачається інформація (такий підхід у своїх працях критикував Базу). □

У наступному прикладі профільна ФП може бути застосована, проте вона не дає консистентної оцінки, на відміну від однорідної інтегральної ФП.

Приклад 2.8 Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_p\in N\left(\mu_i,1\right)$ – незалежні у сукупності ВВ. Параметри μ_i – невідомі.

Потрібно оцінити параметр

$$\theta = \frac{1}{p}\left|\vec{\mu}\right|^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mu_i^2 .$$

Несуттєвий параметр

$$\lambda = \frac{\vec{\mu}}{\left|\vec{\mu}\right|} -$$

напрямок вектора $\vec{\mu}$ в R^p.

λ може розглядатися як точка на поверхні одиничної кулі в R^p. Природньо в якості апріорного розподілу для λ використати однорідний розподіл по поверхні цієї кулі.

В результаті отримаємо наступну однорідну інтегральну ФП [21]:

$$L^U(\theta) \propto \theta^{-(p-2)/4} \exp(-p\theta/2) \cdot I_{\frac{p-2}{2}}\left(\sqrt{p\theta}\left|\vec{x}\right|\right),$$

де

$$\left|\vec{x}\right| = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

I_ν – модифікована функція Бесселя першого роду (порядку ν).

Існує декілька видів модифікованих функцій Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \frac{2^{-\nu} z^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{z\cos t} (\sin t)^{2\nu}\, dt, \quad \mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2};$$

$$I_\nu(z)=\frac{2^{1-\nu}z^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cosh(zt)\,dt,\ \ \mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2};$$

$$I_\nu(z)=\frac{2^{-\nu}z^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-zt}\,dt,\ \ \mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}.$$

Для великих p, припускаючи, що θ залишається фіксованим, коли $p\to\infty$, можна показати, що точка максимума функції [21]:

$$\theta\approx\frac{1}{p}\left|\vec{x}\right|^2-\frac{(p-1)}{p}-\frac{1}{p}\left(\frac{2\left|\vec{x}\right|^2}{(p-2)}-1\right)^{-1}.$$

За законом великих чисел:

$$\frac{\left|\vec{x}\right|^2-E\left|\vec{\xi}\right|^2}{p}\xrightarrow[p\to\infty]{}0.$$

Звідси випливає, що

$$\theta-\theta\xrightarrow[p\to\infty]{P}0.$$

Отже, θ є консистентною оцінкою параметра θ.

На відміну від однорідної інтегральної ФП, профільна ФП не дає консистентної оцінки.

Профільна ФП має вигляд [21]:

$$L(\theta) \propto \exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right).$$

Введемо позначення:

$$g(\theta) = \exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right).$$

$$g'(\theta) = \exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right) \cdot (-2)\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{p\theta}}\right) \cdot p = 0;$$

$$\theta = \frac{\left|\vec{x}\right|^2}{p} \; -$$

стаціонарна точка.

Доведемо, що вона є точкою максимума.

$$g''(\theta) = \left(\exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{\theta}}\left|\vec{x}\right| - p\right)\right)'_{\theta} =$$

$$= \exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right)\sqrt{p}\left|\vec{x}\right|\left(-\frac{1}{2}\right)\theta^{-\frac{3}{2}} + \left(\sqrt{\frac{p}{\theta}}\left|\vec{x}\right| - p\right)\exp\left(-\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)^2\right) \cdot$$

$$\cdot (-2)\left(\left|\vec{x}\right| - \sqrt{p\theta}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{p\theta}}\right) \cdot p;$$

$$g''\left(\frac{\left|\vec{x}\right|^2}{p}\right) = \sqrt{p}\left|\vec{x}\right|\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\left|\vec{x}\right|^2}{p}\right)^{-\frac{3}{2}} + 0 < 0.$$

Отже, функція $L(\theta)$ набуває максимума в точці

$$\theta = \frac{\left|\vec{x}\right|^2}{p}.$$

$$\theta - \theta \xrightarrow[p \to \infty]{P} 1.$$

Отже, така оцінка не є консистентною. □

2.6.2 Переваги застосування інтегральних ММП

Застосування інтегральних ММП дозволяє враховувати невизначеності несуттєвих параметрів.

Використання профільної ФП і заміна несуттєвого параметра λ його умовною ОМП може бути небезпечним, оскільки в цьому випадку не враховується невизначеність λ. У прикладі 1.5 проілюстрована ця проблема: профільна ФП має на один більше, ніж потрібно, «степінь свободи» за рахунок заміни μ на $\bar{x}$.

Варто зазначити, що питання модифікацій профільних ФП з метою урахування невизначеності несуттєвих параметрів добре вивчене. Один із найбільш цікавих прикладів – експоненційна регресійна модель у праці Є та Бергера (1991 р.).

На противагу цьому, інтегральні методи автоматично враховують невизначеність несуттєвих параметрів в тому сенсі, що інтегральна ФП – це середня по всіх можливих умовних ФП (за умовою заданого несуттєвого параметра λ).

Звісно, не можна стверджувати, що інтегральні методи гарантовано вирішать цю проблему задовільним чином, але вибір цього підходу допоможе більше, ніж максимізація.

Насамкінець, зауважимо, що якщо умовні ФП не змінюються значним чином при зміні несуттєвого параметра, то інтегральна ФП буде дуже нечутливою до вибору вагової функції $\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)$.

Порівнюючи складність різноманітних методів, складно робити чіткі висновки через велику кількість модифікацій кожного з підходів. Наприклад, профільна ФП та однорідна інтегральна ФП надзвичайно прості у використанні через можливості сучасної обчислювальної техніки.

Численні модифіковані профільні та маргінальні ФП формують ряд методів від помірної до великої складності. Прості інтегральні методи можуть вимагати трудоємних досліджень для вибору вагової функції.

Після того, як з'явилися комп'ютерні технології, що реалізують методи Монте-Карло марківських ланцюгів, чисельне наближення багатовимірних інтегралів перестало бути проблемою. Це стало значним поштовхом до розвитку інтегральних методів.

Суть методів Монте-Карло полягає в тому, що вводиться деяка ВВ ξ, математичне сподівання якої дорівнює шуканій величині. Далі проводиться багато випробувань для того, щоб отримати конкретну реалізацію вибірки. Вибіркове середнє береться за наближене значення шуканої величини.

Застосування методів Монте-Карло марківських ланцюгів описано у працях П. І. Бідюка, зокрема, [22].

Ключ до правильного порівняння підходів полягає в оцінюванні якості результатів в залежності від складності методів. Наприклад, порівняння на найпростішому рівні профільної та однорідної інтегральної ФП показує, що остання значно ефективніше дозволяє отримати гарні результати на практиці. На вищому рівні складності досліджень було значно менше (винятки – статті Лісео у 1993 р. [23] та Рейда у 1996 р. [24]).

Всі інтегральні ММП базуються на одній базовій ідеї – єдина відмінність між ними полягає у виборі апріорного розподілу. На противагу цьому, модифіковані профільні, умовні і маргінальні ФП базуються на різноманітних логічних обгрунтуваннях. В кожному конкретному випадку буває нелегко визначити, який із цих підходів доречно вибрати.

Ще одна важлива перевага інтегральних методів правдоподібності – можливість дослідження, наскільки чутливою є ФП, тобто наскільки сильно вона змінюється при незначній зміні дослідних даних. Для цього просто можна змінювати вагову функцію і дивитися, як зміниться ФП. Така можливість може бути вирішальною при оцінюванні робастності отриманої оцінки. Робастність (англ. robust – міцний, сильний, стійкий) – властивість статистичного методу, що характеризує незалежність впливу на результат дослідження різноманітних викидів, стійкість до завад.

Навіть якщо виявлена значна чутливість, часто існує можливість визначити, які властивості вагової функції це спричинили, що дозволяє змінити вагову функцію або виявити, які додаткові дані ще потрібно зібрати.

2.7 Обмеження використання інтегральних методів

Інтегральні ММП можна застосовувати не завжди. Проблеми у застосуванні цих методів виникають, наприклад, у задачах, де параметр належить деякому діапазону, а розмір вибірки – невеликий (поверхні правдоподібності можуть набувати поганих форм). Ще гірше, якщо на діапазон обмеження впливають дослідні дані (наприклад, модель, у якій $x_i > \theta,\ i = \overrightarrow{1,n}$). Такі задачі детально розглядаються у роботі Барндорфа-Ніелсена (1991 р.).

Інший складний клас проблем для методів правдоподібності – клас Гліссера-Хуанга.

2.7.1 Передчасне усунення несуттєвих параметрів

Однією із найскладніших проблем, що можуть виникнути при застосуванні інтегральних методів максимальної правдоподібності, є передчасне виключення несуттєвих параметрів. Будь-яке скорочення обсягу аналізованих даних призводить до ризику втратити інформацію, яка потім може знадобитися. Усунення параметрів не є винятком. Розглянемо випадки, коли може виникнути така проблема.

Наприклад, стандартною ситуацією є така, коли після оцінювання може бути спостережена додаткова інформація.

Приклад 2.4 (продовження) Введемо позначення:

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}(1)\right)^2}{n},$$

де

$$\overline{x}(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Раніше отримана однорідна інтегральна ФП:

$$L_1^U\left(\sigma^2\right) \propto \sigma^{-(n-1)} \exp\left(-nS_1^2 \big/ 2\sigma^2\right).$$

Припустимо, що тепер стали відомі додаткові дані: $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$.

Для цих додаткових даних також можна побудувати інтегральну ФП:

$$L_2^U\left(\sigma^2\right) \propto \sigma^{-(m-1)} \exp\left(\frac{-mS_2^2}{2\sigma^2}\right),$$

де

$$S_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(x_{n+j} - \overline{x}(2)\right)^2}{m}, \ \overline{x}(2) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{n+j}.$$

Для того, щоб знайти загальну ФП, може виникнути бажання перемножити $L_1^U\left(\sigma^2\right)$ і $L_2^U\left(\sigma^2\right)$, оскільки набори даних, на яких вони побудовані, були незалежними.

Проте зауважимо, що якби всі дані були доступні відразу, ми би побудували

$$L_3^U\left(\sigma^2\right) \propto \sigma^{-(n+m-1)} \exp\left(\frac{-(n+m)S_3^2}{2\sigma^2}\right),$$

де

$$S_3^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}(1)\right)^2}{n} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(x_{n+j} - \overline{x}(2)\right)^2}{m}.$$

$L_3^U\left(\sigma^2\right)$ не є добутком $L_1^U\left(\sigma^2\right)$ і $L_2^U\left(\sigma^2\right)$. Дійсно, знаючи тільки $L_1^U\left(\sigma^2\right)$ і нові дані, не можна відновити $L_3^U\left(\sigma^2\right)$, потрібно ще знати $\overline{x}(1)$.

Цей приклад показує, що знайшовши $L_1^U\left(\sigma^2\right)$, ми втратили інформацію про вибіркове середнє, яка знадобилася пізніше. □

2.7.2 Точкове оцінювання параметрів у метааналізі

Інший випадок втрати інформації може виникнути у метааналізі. Метааналіз – це поняття наукової методології, що означає об'єднання результатів декількох досліджень методами статистики для перевірки однієї або декількох взаємопов'язаних наукових гіпотез. В метааналізі використовують або первинні дані оригінальних досліджень, або узагальнюють вторинні (опубліковані) результати досліджень, присвячених одній проблемі. Це частий, але не обов'язковий компонент статистичного огляду.

Приклад 2.5 (продовження) Узагальнимо приклад наступним чином:

$$\xi_j^i \in N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right),$$

де $j=\overrightarrow{1,n_i}$, $i=\overrightarrow{1,\mathrm{p}}$ (тобто проведено p стохастичних експериментів і в результаті кожного випробування під номером i отримана конкретна реалізація вибірки обсягом n_i).

Нехай

$$\mu_i \in N\left(\alpha, \tau^2\right),\ i=\overrightarrow{1,\mathrm{p}}.$$

Параметри, які необхідно оцінити, – μ_i, $i=\overrightarrow{1,\mathrm{p}}$ або $\left(\alpha, \tau^2\right)$.

Така задача може виникнути, наприклад, при спостереженні кількості особин деякої популяції на p різних ділянках.

В кожному наборі під номером i можна прийняти рішення про усунення несуттєвого параметра σ_i^2 за допомогою інтегрування. При цьому, наприклад, можна використати вагову функцію у наступному вигляді [11]:

$$\pi\left(\sigma_i^2\right)=\frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Зауважимо, що в цій роботі ми не досліджуємо питання доцільного вибору вагової функції.

В результаті отримаємо інтегральну ФП у наступному вигляді:

$$L_i\left(\mu_i\right)\propto\left(S_i^2+\left(\overline{x}_i-\mu_i\right)^2\right)^{-n_i/2},$$

де

$$\overline{x}_i=\sum_{j=1}^{n_i}\frac{x_j^i}{n_i},\ S_i^2=\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\left(x_j^i-\overline{x}_i\right)^2}{n_i},\ i=\overrightarrow{1,\text{p}}.$$

Далі, очевидно, виникає бажання використати в метааналізі добуток цих ФП разом з відомою інформацією: $\mu_i\in N\left(\alpha,\tau^2\right),\ i=\overrightarrow{1,\text{p}}$. Якби σ_i^2 були повністю між собою не пов’язані, такий підхід був би раціональним. Проте часто виникає протилежна ситуація, і усунення параметрів інтегруванням використовувати не можна. Це питання розглядалося у роботі Хью і Бергера у 1983 році. □

Проблеми при застосуванні інтегральних ММП виникають, якщо несуттєві параметри містять значний обсяг інформації про те, як дослідні дані пов'язані з параметрами, що оцінюються. У розглянених вище прикладах несуттєві параметри містили не дуже багато такої інформації, тому оцінки, отримані перемножуванням ФП, не дуже відрізняються від оцінок, отриманих за допомогою правильної ФП.

В багатьох випадках на практиці усувають несуттєві параметри на різноманітних етапах дослідження, а потім множать отримані ФП і максимізують отриману функцію. Це не завжди коректно з точки зору математичного підходу, але отримані таким чином результати часто задовольняють потреби дослідників. Важливо розуміти, коли це раціонально, а коли все ж потрібно підбирати інші методи.

Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячено структуризації та систематизації інформації про ММП. Стисло подано ключові означення та факти із теорії ймовірностей та математичної статистики, які використовуються у роботі, зокрема, поняття точкового оцінювання та вимоги до точкових оцінок параметрів генеральної сукупності. Всі ММП базуються на максимізації ФП. Точка максимума береться за наближене значення невідомого параметра.

У наукових працях існує багато підходів до означення ФП. В нашій роботі вона розглядається як функція, що залежить від невідомих параметрів ГС та дослідних даних (конкретної реалізації вибірки). Існує дві статистичні школи, що використовують принципово різні методи для точкового оцінювання, – байєсівська школа та школа частотного підходу, представниками якої є Фішер та Нейман.

В різноманітних практичних задачах одні методи дають точні результати, а інші ні. Неможливо наперед визначити, який із методів застосувати краще. Вище подано приклади, що ілюструють цю проблему.

В розділі досліджується класична ФП та різноманітні її модифікації – зокрема, широкий клас інтегральних ФП, які переважно відрізняються лише вибором вагової функції. Неінтегральні методи переважно базуються на максимізації по несуттєвих параметрах або переході до часткової ФП, що неминуче призводить до втрати інформації. Модифіковані ММП використовуються для того, щоб усунути несуттєві параметри – ті, які не оцінюються, але враховуються при оцінці інших параметрів.

Дуже часто інтегральні методи працюють краще у випадках, коли профільна ФП має особливі точки і спрямовується на нескінченність. Інтегральні методи прості у використанні завдяки можливості комп'ютерних технологій (існують методи Монте-Карло марківських ланцюгів, що реалізують чисельне наближення багатовимірних інтегралів). Вони розв'язують широкий клас задач, в яких не можна застосувати інші підходи, а також враховують невизначеність несуттєвих параметрів, на відміну від методів, які передбачають заміну несуттєвого параметра деяким його наближенням.

Проте існують також і обмеження застосування інтегральних ММП, зумовлені можливою наявністю в несуттєвих параметрах значного обсягу інформації про параметри, що оцінюються. Зокрема, можна втратити інформацію, яка стане необхідна при подальшому аналізі, якщо стануть відомі додаткові дані. Проблеми також виникають у метааналізі – коли результати взаємопов'язаних досліджень об'єднуються для перевірки однієї статистичної гіпотези.

РОЗДІЛ 3 ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКІВ ОПЕРАЦІЙ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

3.1 Обгрунтування використання нормального розподілу

Для дослідження використаємо щоденні дані про ціни закриття 68 найбільш капіталізованих (на період дослідження) акцій, що торгуються на Нью-Йоркській фондовій біржі (New York Stock Exchange – NYSE). Період, який охоплюють дані, – більш, ніж 10 років (всі робочі дні з 3 січня 2006 року по 27 жовтня 2017 року).

По наявних даних обчислено проценти зміни ціни закриття акцій відносно цін їх закриття попереднього робочого дня, щоб звести дані до одного масштабу.

Розглянемо зведену таблицю для процентної зміни ціни закриття SPY (рис. 3.1).

Рисунок 3.1 – Графік частот процентної зміни закриття SPY

На рис. 3.1 видно криву Гаусса з математичним сподіванням приблизно в нулі. Такі ж графіки частот можна отримати для кожної іншої компанії в наших даних.

Перевіримо, чи можна прийняти гіпотезу ефективного ринку за допомогою обчислення показника Херста *H*. Він використовується в аналізі часових рядів як міра, яка зменшується, якщо затримка між двома однаковими парами значень у часовому ряду збільшується. Послідовності, для яких $H>0.5$ вважаються персистентними – вони зберігають наявну тенденцію, тобто зростання в минулому найбільш імовірно призводить до зростання в майбутньому і навпаки. При значенні *0.5* явної тенденції не виражено, а при менших значеннях процес характеризується антиперзистентністю – будь-яка тенденція прагне змінитися протилежною.

Для обчислення показника Херста використаємо функцію hurstexp() пакету pracma у середовищі R studio. Результат роботи функції подано на рис. 3.2.

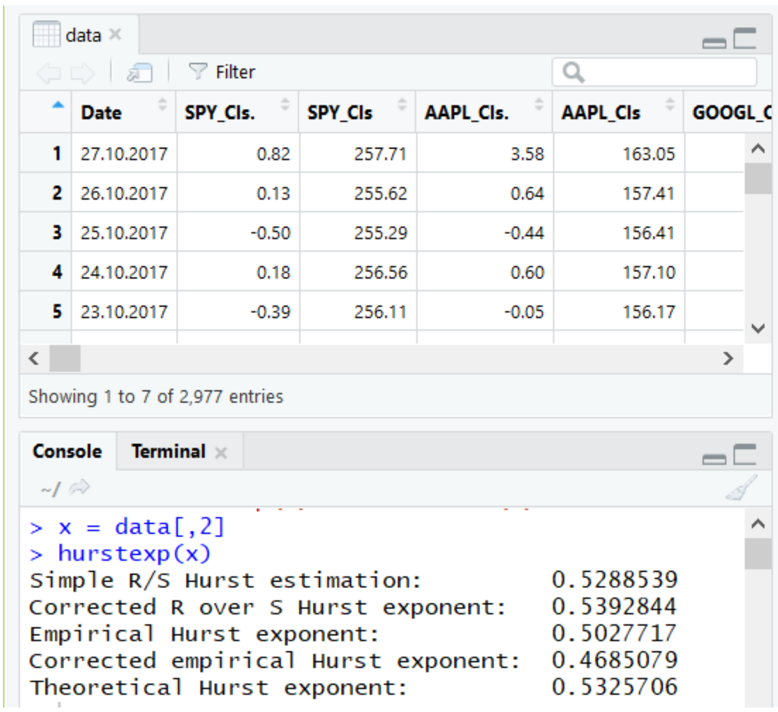

Рисунок 3.2 – Обчислення показника Херста

При значеннях показника Херста, що близькі до 0.5, використовується гіпотеза ефективного ринку, розподіл процентної зміни цін за ЦГТ вважають нормальним. В іншому випадку використовується гіпотеза фрактального ринку, процес вважають таким, що має пам’ять, і для його аналізу використовується теорія фракталів. Бачимо, що показник Херста для досліджуваного часового ряду потрапив у діапазон $H \in [0.45; 0.55]$, тому використовуємо гіпотезу ефективного ринку.

Для нормального розподілу існують таблиці квантилів (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Таблиця квантилів нормального розподілу

Ймовірність, %	95	97,5	99	99,99
Квантиль	1,645	1,96	2,326	3,715

3.2 Використання різноманітних методів максимальної правдоподібності для оцінки волатильності

3.2.1 Варіаційно-коваріаційний VaR-підхід

Волатильність можна обчислити як оцінку середньоквадратичного відхилення для кожного тікера. Для цього використовується наступна формула:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

де $\overline{x}$ – вибіркове середнє, n – обсяг вибірки, x_i – значення конкретної реалізації вибірки.

Цей підхід не враховує невизначеність несуттєвого параметра – математичного сподівання.

3.2.2 Ідея використання ММП для усунення несуттєвого параметра

Із використанням методів максимальної правдоподібності можна врахувати невизначеність параметра a нормального розподілу. В реальному житті на цей параметр впливає безліч факторів, які можна виявити засобами фундаментального та технічного аналізу. Такі події, як звіти компаній, чутки про злиття та поглинання, виступи виконавчих та фінансових директорів компанії перед пресою, виплата дивідендів, спліти та антиспліти акцій, впливають на математичне сподівання.

Якщо під час фундаментального та технічного аналізу не було виявлено жодних подій, які впливають на математичне сподівання процентної зміни ціни, то доречно припустити, що несуттєвий параметр розподілений рівномірно на деякому проміжку. Якщо такі фактори було знайдено, то припустимо, що несуттєвий параметр розподілений за деяким іншим законом. Таким чином, апріорну інформацію, отриману під час попереднього фундаментального та технічного аналізу, можна внести у вагову функцію інтегральної функції правдоподібності.

Профільна функція правдоподібності може допомогти у тому випадку, коли потрібно визначити максимальні втрати, які можуть виникнути в результаті настання факторів ризику. Максимізуючи функцію правдоподібності по несуттєвому параметру, ми можемо розглянути найбільш несприятливий сценарій розвитку подій і у підсумку використати більш обережну стратегію.

Для нормально розподіленої ГС використаємо декілька модифікаїй функції правдоподібності.

Класична ФП має наступний вигляд:

$$L_{класична}\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}$$

Однорідна інтегральна ФП:

$$L^U\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\int L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)da=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\int e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}da=$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{(n-1)/2}\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right)$$

Профільна ФП має наступний вигляд:

$$L\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\sup_a L\left(\vec{x},a,\sigma^2\right)=L\left(\vec{x},\overline{x},\sigma^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right).$$

Інтегральна ФП в загальному вигляді:

$$L\left(\vec{x},\theta\right)=\int L\left(\vec{x},\theta,\lambda\right)\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)d\lambda,$$

де $\pi\left(\lambda\middle|\theta\right)$ – вагова функція (це умовна апріорна щільність λ за умовою θ).

Для інтегральної ФП Джефрі вагова функція має наступний вигляд:

$$\pi\left(a\right) \propto \frac{1}{\sqrt{a\left(1-a\right)}}.$$

Графік цієї функції подано на рис. 3.3:

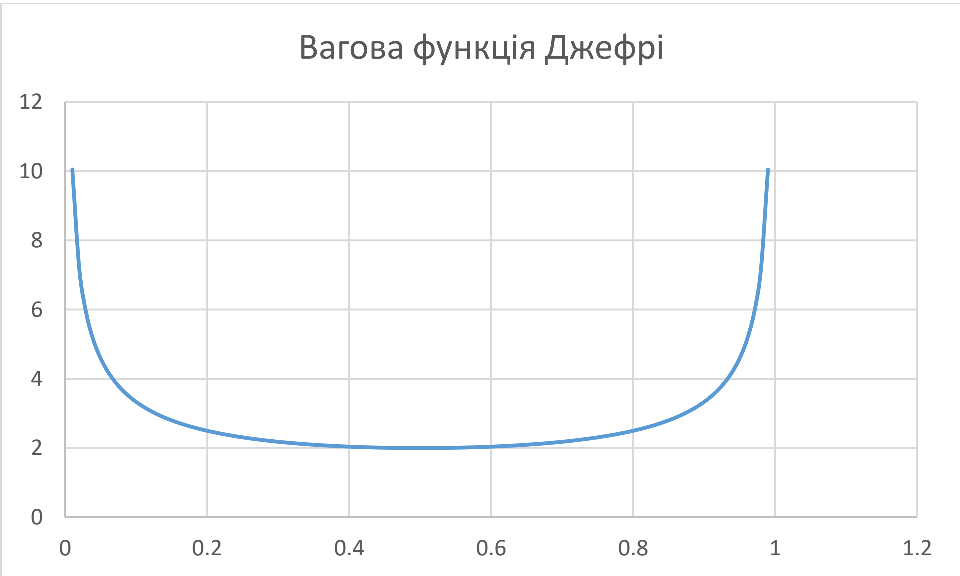

Рисунок 3.3 – Вагова функція Джефрі

Для того, щоб використати її як вагову функцію для несуттєвого параметра – математичного сподівання, зсунемо цю функцію вздовж осі абсцис так, щоб вона стала симетричною відносно осі ординат. Це потрібно тому, що ціна може рухатись як в один, так і в інший бік. Отже, зсунута функція Джефрі:

$$\pi\left(a\right)\propto\frac{1}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)}}$$

Отже, інтегральна ФП Джефрі для $a\in\left(-0.5;0.5\right)$:

$$L_{Jeffrey}\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}\frac{1}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-a\right)}}\right)da$$

Така функція надає більшої ваги значним рухам ціни.

Тепер розглянемо функцію, яка, на противагу функції Джефрі, надає більшої ваги близьким до нуля значенням математичного сподівання.

$$f\left(a\right)=2a+1,\ \text{якщо}\ a\in\left(-0.5;0\right],$$

$$f\left(a\right)=-2a+1,\ \text{якщо}\ a\in\left(0;0.5\right)$$

Графік трикутної вагової функції зображено на рис. 3.4.

Для даної вагової функції інтегральна ФП для $a\in\left(-0.5;0.5\right)$:

$$L_{triangle}\left(\vec{x},\sigma^2\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma^n}\left(\int\limits_{-1/2}^{0}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}\left(2a+1\right)da+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{1/2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-a\right)^2}\left(-2a+1\right)da\right)$$

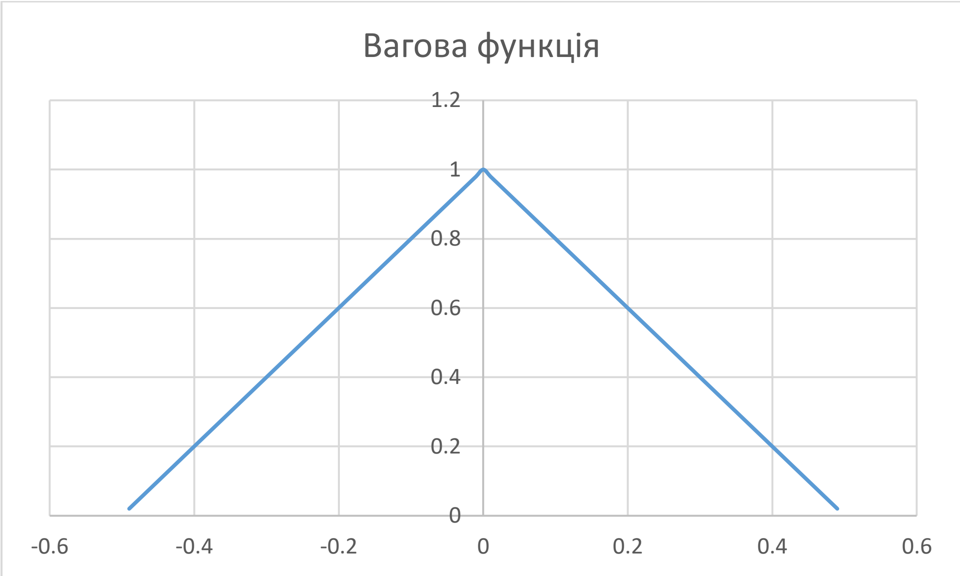

Рисунок 3.4 – Вагова трикутна функція

3.3 Оцінювання кількісних характеристик ризиків

Для оцінювання ризиків розроблено програмний продукт мовою C# (програмне середовище – Visual Studio 2017). У ньому є можливість обрати ймовірність, з якою ми стверджуємо, що наші втрати не перевищать резервного капіталу впродовж періоду до часу настання ризику.

Також можна вказати суму інвестицій (у доларах або в процентах), змінити склад портфеля, вказавши бажані тікери через кому (якщо у нас нема даних по бажаному тікеру, про це виводиться повідомлення). Також можна вставити тікери з буферу обміну (потрібне форматування відбувається автоматично).

Якщо обрано варіант «Обчислити прогнозовані втрати», то з’являється додаткове вікно, в якому потрібно вказати час, за який ці втрати треба порахувати. Якщо обрано «Обчислити час настання ризику», то додатково потрібно ввести розмір втрат, які покриваються нашими резерами.

3.3.1 Обчислення часу настання ризику

Оскільки дані у таблицях подано у процентах, то для збереження розмірності волатильність була поділена на 100%.

Далі ми знайшли час настання ризику за формулою:

$$N = \left(\frac{VaR}{\alpha \sigma B\Pi} \right)^2$$

де VaR – величина втрат (розмір резервного капіталу) на кожну компанію, σ – знайдена волатильність, ОП – сума інвестицій (задана користувачем).

Вважаємо, що сума інвестицій поділена між компаніями у портфелі порівну (розмірність може бути як у доларах, так і у процентах).

Результат обчислення часу настання ризику подано на рисунку 3.5:

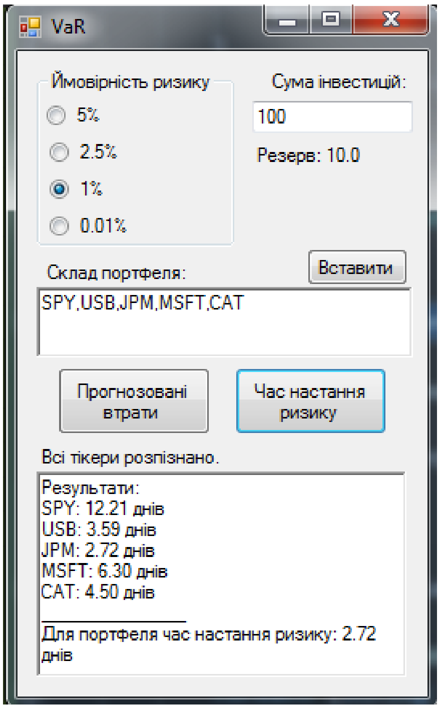

Рисунок 3.5 – Обчислення часу настання ризику

Бачимо, що у портфелі, який проаналізовано програмним продуктом, JPM – найбільш волатильний тікер. Тому час настання ризику для нього найменший. Час настання ризику для портфеля береться як мінімальний зі всіх обчислених періодів для компаній.

Результати означають, що якщо ми вкладемо у портфель 100 доларів (або 100 відсотків суми), то з ймовірністю 99% ми можемо стверджувати, що наші втрати не перевищать 10 доларів впродовж наступних 2.72 днів.

Відповідно якщо поділити наші 100 доларів на 5 компаній (по 20 доларів), то втрати по кожній компанії не перевищать 10 / 5 = 2 доларів впродовж знайденого періоду.

Ми можемо через обчислену кількість днів поступово виходити з нашої позиції і наші втрати не перевищать заданий ліміт. Також можна перебалансовувати ліміти на наші компанії (на більш волатильну давати більший ліміт, на менш волатильну – менший), щоб утримувати позицію довше.

3.3.2 Обчислення очікуваних і неочікуваних втрат

Для кожного тікера ми взяли дані за задану користувачем кількість робочих днів.

Далі для кожної підвибірки ми обчислили оцінку волатильності і оцінку VaR.

Очікувані втрати – це середнє значення усіх таких отриманих VaR.

Неочікувані – різниця між максимальним значенням VaR і очікуваними втратами.

Для нашого портфеля ми отримали значення, що відображені на рис. 3.6.

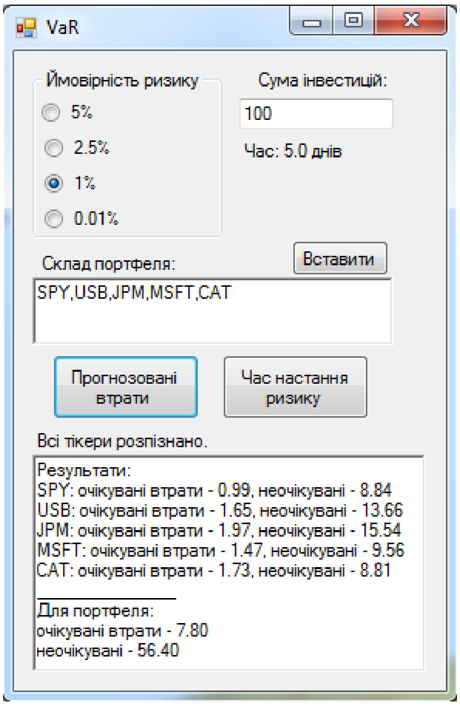

Рисунок 3.6 – Обчислення очікуваних та неочікуваних втрат

Для того, щоб обчислити очікувані і неочікувані втрати для портфеля, необхідно додати отримані втрати для кожного тікера у портфелі.

Отримані результати для портфеля, що розглядається, говорять нам, що вклавши 100 доларів у такий портфель (по 20 доларів в кожну акцію), ми можемо бути впевнені на 99%, що впродовж 5 робочих днів наші втрати не перевищать знайдених значень. Для портфеля очікувані втрати – $7.8, а неочікувані – $56.4.

3.4 Порівняльний аналіз результатів, отриманих із застосуванням різноманітних ММП та із застосуванням коваріаційно-варіаційного підходу

Розглянемо чотири підходи до оцінювання ризиків операцій на фондовому ринку: коваріаційно-варіаційний, використання однорідної інтегральної функції правдоподібності, вагової функції, що враховує рейтинги аналітичних агенцій, та профільної функції правдоподібності.

Для того, щоб порівняти оцінки неочікуваних та очікуваних втрат за різними методами, обчислимо ці характеристики для однакових ступенів ризику (ймовірностей) та однакового часу інвестиції. Для визначення набору акцій для нашого портфеля розглянемо кореляційну матрицю (рис. 3.7). Матриця побудована у середовищі Anaconda мовою програмування Python 3.

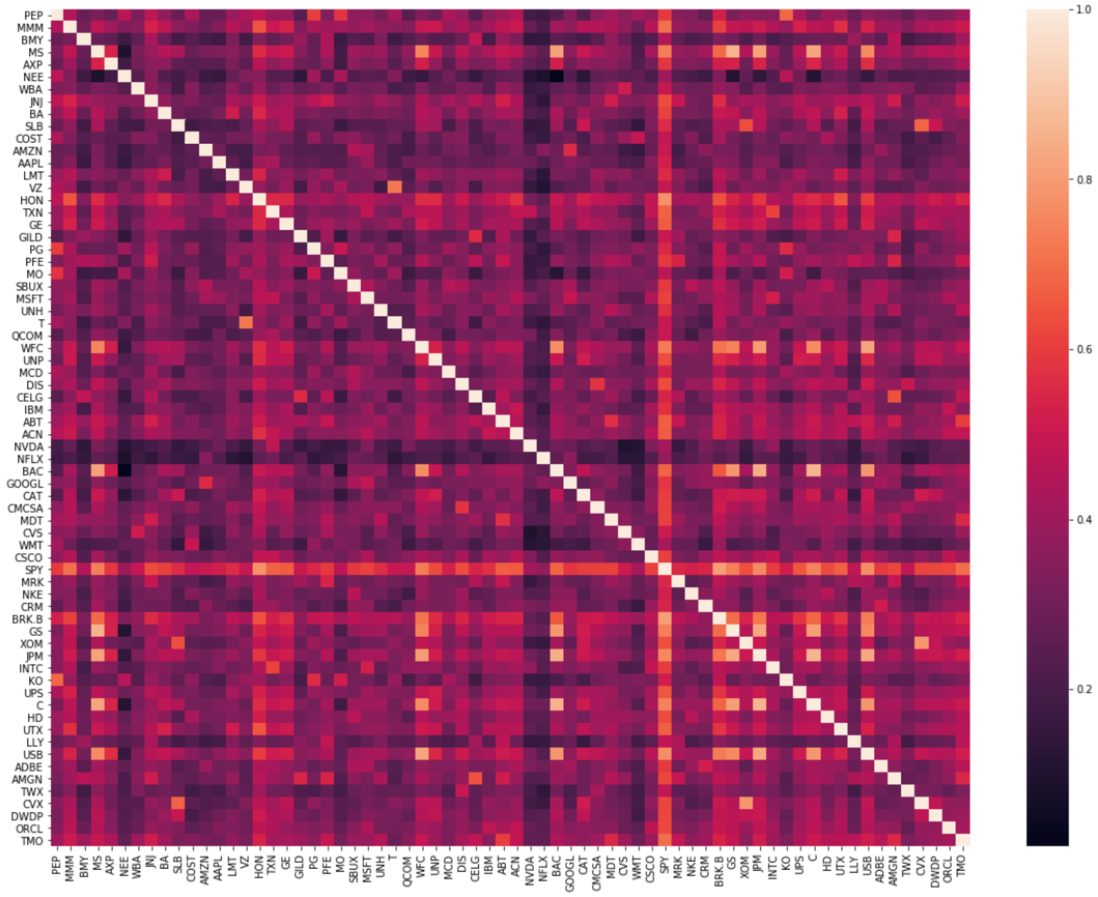

Рисунок 3.7 – Кореляційна матриця для фінансових інструментів

Ми помітили значні кореляції для наступного набору акцій: SPY, USB, JPM, MSFT, CAT. Це свідчить про те, що значний вплив на ціну в один бік для одного з цих активів буде часто так само впливати на інший актив. Значна кореляція говорить про те, що, можливо, в даних активів є спільні фактори впливу та фактори ризику. Фундаментальний аналіз даних компаній підтверджує цю гіпотезу. Тому в подальшому будемо розглядати цей портфель.

Матриця коваріацій для обраного портфеля винесена у рис. 3.8.

	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
SPY	1.000000	0.765861	0.759878	0.614661	0.601578
USB	0.765861	1.000000	0.829854	0.417971	0.497563
JPM	0.759878	0.829854	1.000000	0.422293	0.503763
MSFT	0.614661	0.417971	0.422293	1.000000	0.356486
CAT	0.601578	0.497563	0.503763	0.356486	1.000000

Рисунок 3.8 – Матриця коваріацій для обраного портфеля

Розглянемо результати застосування різних методів для оцінки волатильності кожного елемента портфеля. Sigma – це знайдена оцінка волатильності, Coef – це показник, яка частина ризикового капіталу, обчисленого за традиційним VaR-підходом, може бути використана для інших цілей.

У підході VaR величина прогнозованих втрат прямо пропорційна волатильності. ММП враховують невизначеність несуттєвого параметра, показуючи, що величина очікуваних та неочікуваних втрат насправді менша, ніж оцінює традиційний підхід.

Наведемо результати роботи програмного продукту для параметрів налаштування за замовчуванням.

3.4.1 Коваріаційно-варіаційний підхід

Коваріаційно-варіаційний (класичний) підхід для нашого портфеля дав наступні результати (табл. 3.2):

Таблиця 3.2 – Результати коваріаційно-варіаційного підходу

Ticker	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
Sigma	1.230	2.269	2.605	1.713	2.026
Coef	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Коефіцієнт нульовий, оскільки ці результати отримані за класичним підходом.

3.4.2 Однорідний інтегральний ММП

Результати однорідного інтегрального ММП (табл. 3.3):

Таблиця 3.3 – Результати однорідного інтегрального ММП

Ticker	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
Sigma	1.107	1.847	2.200	1.634	1.914
Coef	-0.112	-0.228	-0.184	-0.048	-0.059

Значення оцінки волатильності – менше, ніж у класичному підході.

Коефіцієнти у третьому рядку таблиці мають наступне значення:

$$EL_{real} = \left(1 + Coef\right) EL^{*}$$
$$UL_{real} = \left(1 + Coef\right) UL^{*}$$

де EL_{real} – реальні очікувані втрати, EL^{*} – оцінені за класичним підходом очікувані втрати, UL_{real} – реальні неочікувані втрати, UL^{*} – оцінені за класичним підходом неочікувані втрати.

Наприклад, для тікера SPY:

$$EL_{real} = \left(1 + Coef\right) EL^{*} = \left(1 - 0.112\right) \cdot 0.99 = 0.88$$
$$UL_{real} = \left(1 + Coef\right) UL^{*} = \left(1 - 0.112\right) \cdot 8.84 = 7.85$$

Решта 11.2% резервного капіталу може бути вивільнена для інших операцій.

Розглянемо залежність отриманих оцінок волатильності від ширини вікна n та графік відхилень від знайденої оцінки (рис. 3.9).

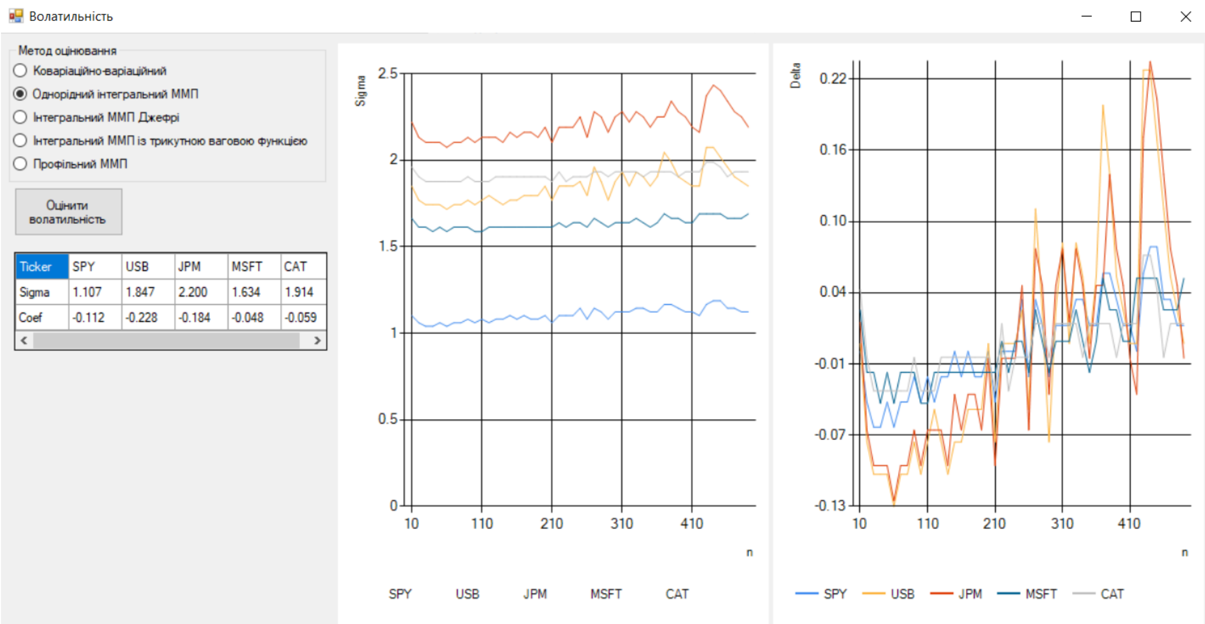

Рисунок 3.9 – Оцінювання волатильності однорідним інтегральним ММП

Бачимо, що оцінки приблизно однакові до деякого критичного розміру вікна. З графіка видно, що для даного методу достатньо вибирати ширину вікна від 10 до 200. При цьому оцінки не будуть суттєво відрізнятися між собою.

Цікаво розглянути, який вигляд має дана функція правдоподібності. Програмний продукт логує всі проміжні обчислення у текстовий файл, що дозволяє розглянути графіки даної функції. На рис. 3.10 подано графік однорідної ФП для ширини вікна n=10. На рис. 3.11 – для ширини вікна n=460.

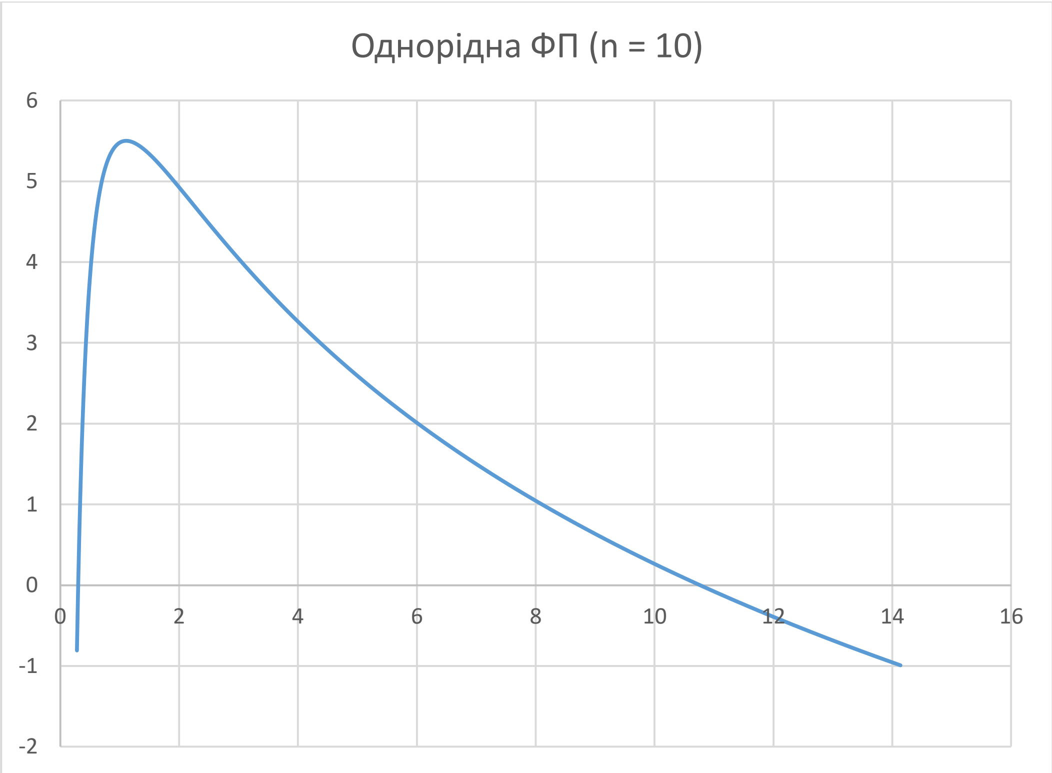

Рисунок 3.10 – Логарифмічна однорідна ФП (SPY, n = 10)

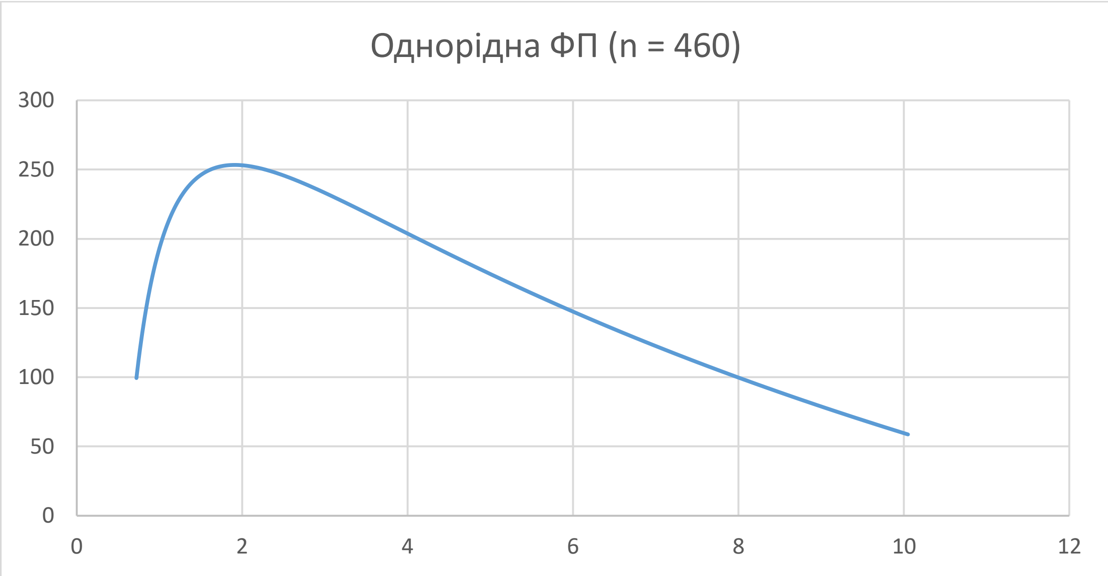

Рисунок 3.11 – Логарифмічна однорідна ФП (SPY, n = 460)

З графіків видно, що однорідна ФП незалежно від розміру вікна має чітко визначену точку глобального максимума, яка зі збільшенням ширини вікна зсувається вправо. Те ж видно і на графіках залежності отриманих оцінок від ширини вікна.

3.4.3 Інтегральний ММП Джефрі

Результати застосування інтегрального ММП Джефрі подано у табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Результати інтегрального ММП Джефрі

Ticker	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
Sigma	1.650	2.156	2.423	2.011	2.218
Coef	0.255	-0.052	-0.075	0.148	0.086

На відміну від однорідного ММП, для деяких активів ММП Джефрі показує, що для деяких активів розмір резервного капіталу повинен бути збільшений (для SPY, MSFT та CAT). Графіки залежності значень оцінок волатильності від розміру вікна та графік похибок подано на рис. 3.12.

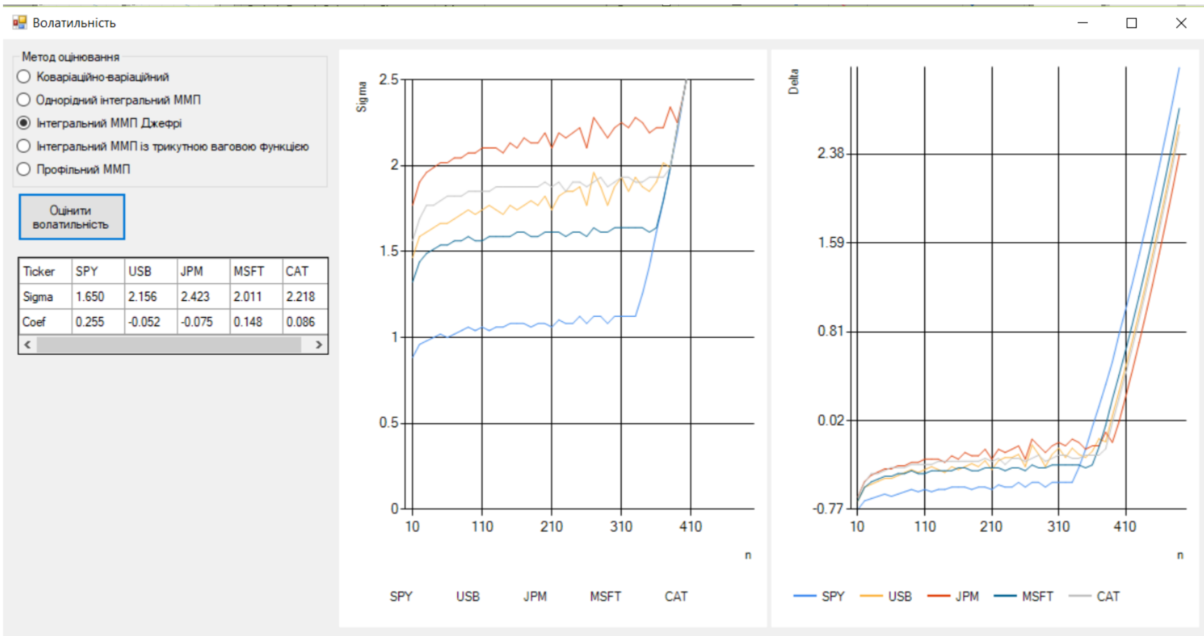

Рисунок 3.12 – Оцінювання волатильності інтегральним ММП Джефрі

Графіки показують, що значення оцінки волатильності збільшується зі збільшенням ширини вікна. Для цього методу доречно обирати ширину вікна від 100 до 200.

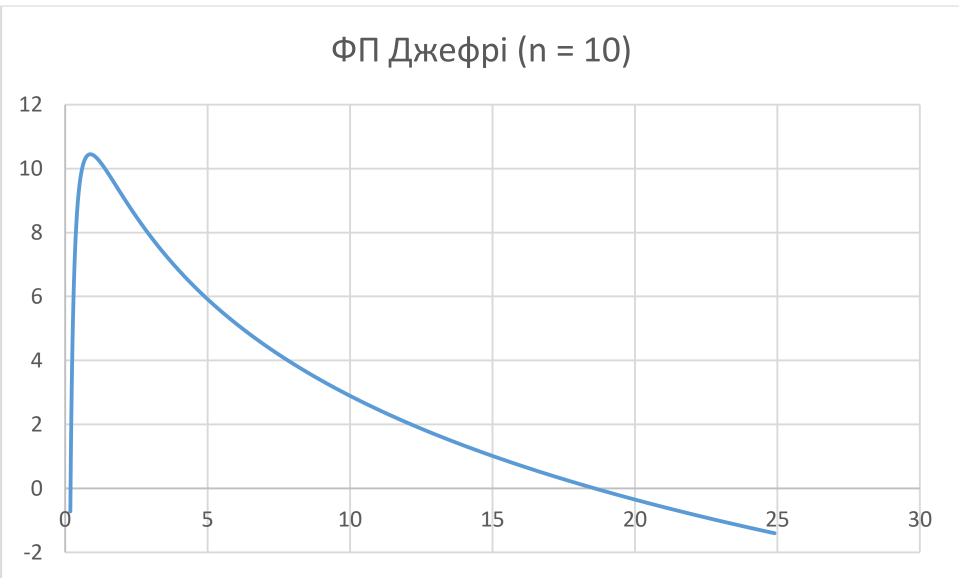

Рисунок 3.13 – ФП Джефрі (SPY, n = 10)

На рис. 3.13 видно, що ФП спадає після глобального максимума вдвічі плавніше, ніж однорідна ФП.

3.4.4 Інтегральний ММП з трикутною ваговою функцією

Розглянемо результати застосування інтегрального ММП з трикутною ваговою функцією (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 – Результати інтегрального ММП з трикутною ваговою функцією

Ticker	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
Sigma	1.099	1.868	2.199	1.635	1.929
Coef	-0.119	-0.215	-0.185	-0.048	-0.051

Згідно з отриманими результатами, величина резервного капіталу для кожного активу може бути зменшена.

Графіки на рис. 3.14 показують протилежну ситуацію до ФП Джефрі. Тут значення оцінок і похибок коливаються біля деякого значення на великих розмірах вікна, а на малих видно стрибок вгору, який у випадку ФП Джефрі видно на значеннях ширини вікна більше, ніж 300. Це пов’язано з тим, що ФП Джефрі більшої ваги надає відмінним від нуля значенням математичного сподівання, а трикутна вагова функція навпаки – значенням, близьким до нуля.

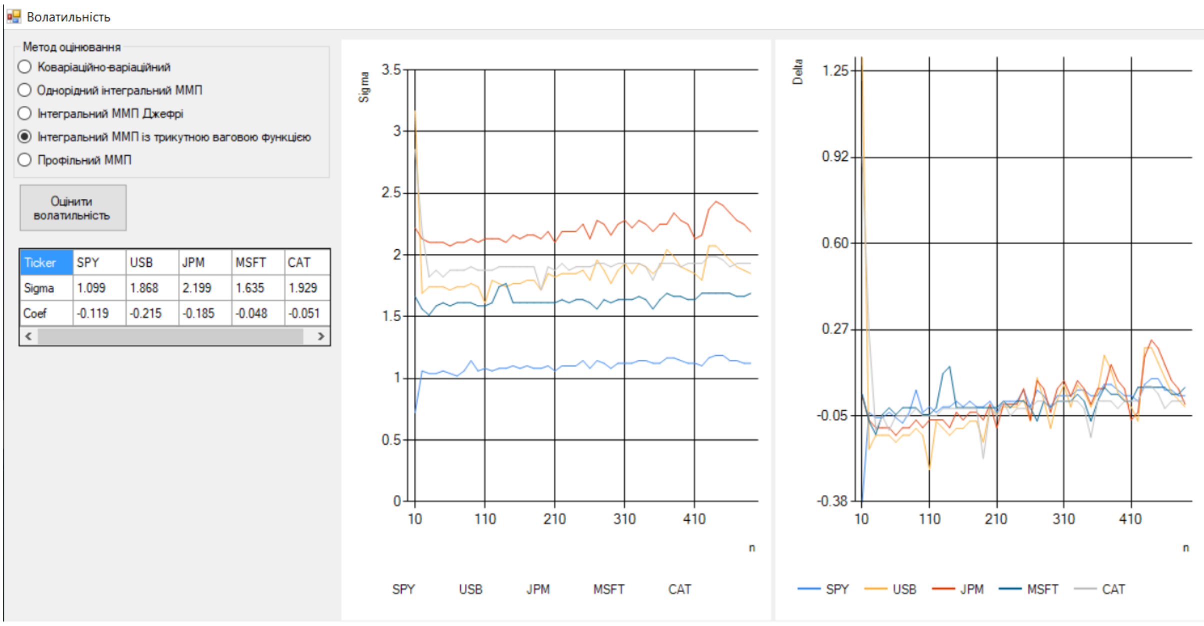

Рисунок 3.14 – Оцінювання волатильності інтегральним ММП з трикутною ваговою функцією

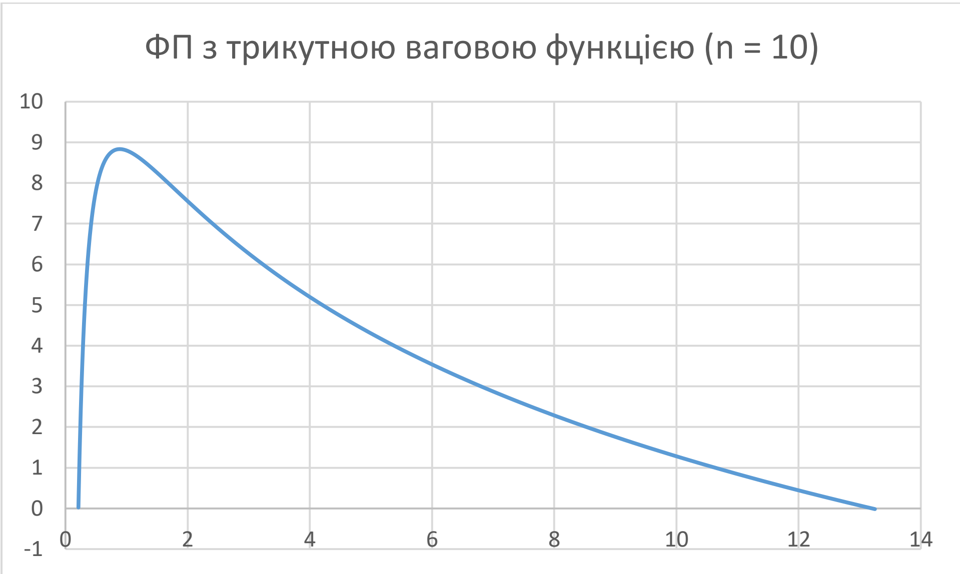

Рисунок 3.15– ФП з трикутною ваговою функцією (SPY, n = 10)

На рис. 3.15 видно, що ФП спадає після глобального максимума трохи швидше, ніж ФП Джефрі.

3.4.5 Профільний ММП

Результати застосування профільного ММП подано у табл. 3.6.

Таблиця 3.6 – Результати застосування профільного ММП

Ticker	SPY	USB	JPM	MSFT	CAT
Sigma	1.086	1.817	2.163	1.604	1.878
Coef	-0.133	-0.249	-0.205	-0.068	-0.079

При використанні профільного ММП, так як і при використанні однорідного, ми виявили, що резервний капітал для кожного активу може бути зменшений до 24.9%.

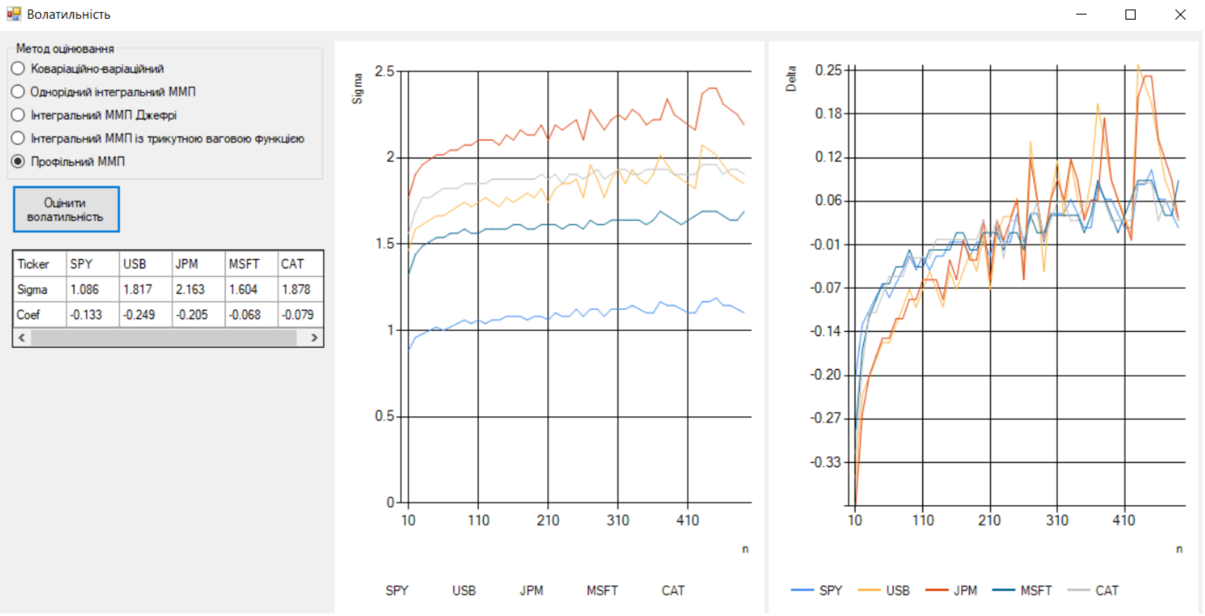

Рисунок 3.16 – Оцінювання волатильності профільним ММП

Рис. 3.16 показує, що при ширині вікна від 50 до 200 оцінки волатильності приблизно однакові, після чого спостерігаються сильні рухи в обидва боки. Значення похибки збільшується зі збільшенням ширини вікна.

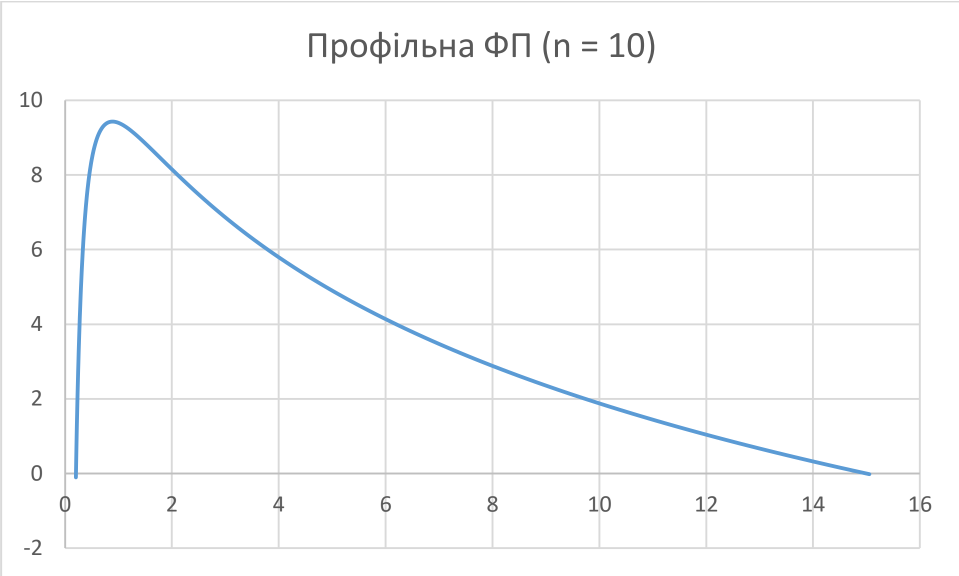

Рисунок 3.17 – Логарифмічна профільна ФП (SPY, n = 10)

На рис. 3.17 можна побачити, що ФП спадає плавніше, ніж однорідна, і швидше, ніж ФП Джефрі.

3.4.6 Порівняльний аналіз

Розглянемо відсоток зекономленого резервного капіталу для активу USB, який отримано різними методами (рис. 3.18):

Застосування всіх цих методів показало, що величина резервного капіталу для деяких чи для усіх активів може бути суттєво зменшена. Такі результати зумовлені врахуванням невизначеності несуттєвого параметра.

При застосуванні методів, які не враховують фундаментальні особливості активів (однорідний та профільний ММП), можна зробити висновок, величина вивільнених коштів значно більша (для даного активу). Зменшення величини вивільненого капіталу при використанні ФП Джефрі та трикутної вагової функції зумовлено врахуванням апріорної інформації про актив.

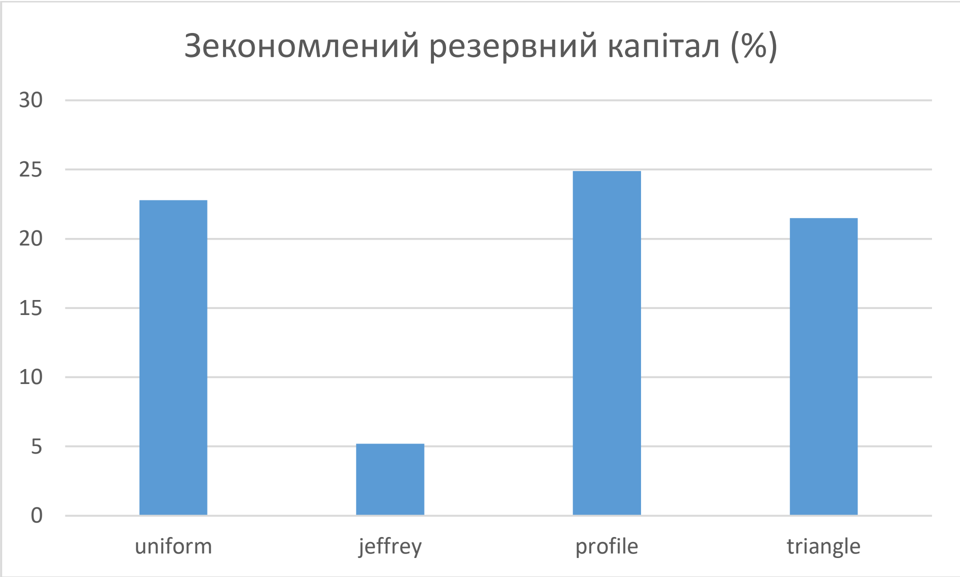

Рисунок 3.18 – Зекономлений резервний капітал

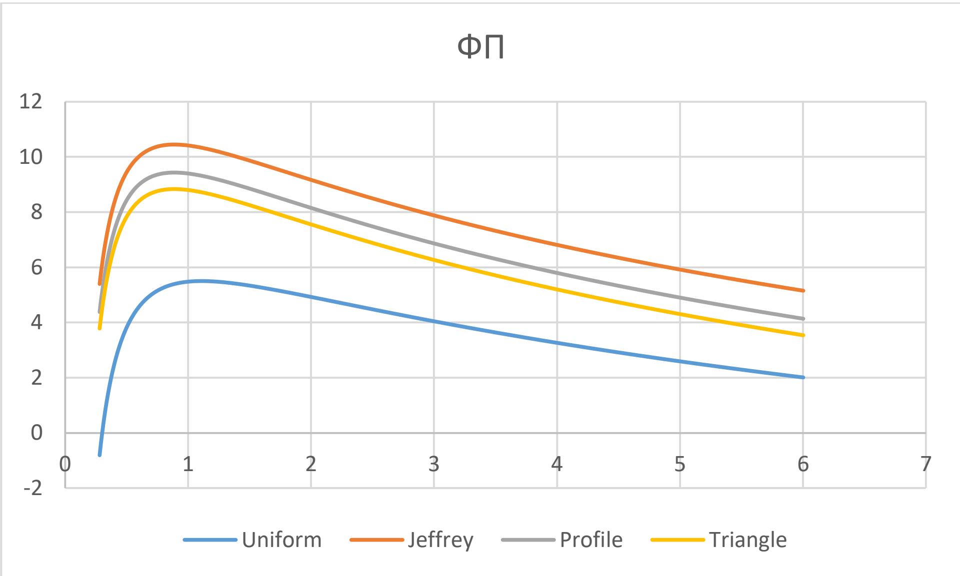

Рисунок 3.19 – Загальний вигляд ФП (SPY, n = 10)

На рис. 3.19 видно, що всі розглянуті ФП мають схожу структуру.

Рішення про вибір конкретного методу залежить від типу активів, що входять у портфель, від результатів фундаментального та технічного аналізу, що формують апріорну інформацію, а також від попереднього досвіду особи, що приймає рішення. У таблиці 3.6 подано переваги та недоліки застосованих методів.

Таблиця 3.6 – Переваги та недоліки розглянутих підходів

№	Назва підходу	Переваги	Недоліки
1	Коваріаційно-варіаційний підхід	Швидкість, простота	Не враховано вплив неспостережуваних факторів, тому оцінки ризиків часто не відображають реального стану речей
2	Використання однорідної інтегральної або профільної ФП	Можливість застосовувати за відсутності відомих факторів впливу на математичне сподівання, більш точні оцінки через врахування несуттєвого параметра	Відсутність врахування особливостей активу, отриманих під час фундаментального аналізу
3	Використання ФП Джефрі або трикутної ФП	Врахування апріорної інформації про активи, отриманої в ході фундаментального та технічного аналізу	Іноді величина прогнозованих втрат може бути суттєво завищена. Це може призвести до резервування надто великої суми на покривання збитків

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено оцінюванню ризиків операцій на фондовому ринку. Портфель для оцінювання обрано за допомогою кореляційного аналізу.

Розроблено програмний продукт, який дозволяє визначити ймовірність ризику, величину очікуваних та неочікуваних втрат та час настання ризику за VaR-підходом. Для оцінювання волатильності фінансових інструментів у межах VaR-підходу використано 5 методів:

– класичний (коваріаційно-варіаційний);
– використання однорідної інтегральної ФП;
– використання інтегральної ФП Джефрі;
– використання інтегральної ФП з трикутною ваговою функцією;
– використання профільної ФП.

Виявлено, що у випадку використання однорідного та профільного ММП величина резервного капіталу може бути вивільнена для всіх активів, а у випадку використання ММП Джефрі та трикутного ММП – для двох активів із п’яти.

ММП дозволяють усунути невиначеність несуттєвого параметра – математичного сподівання розподілу Гаусса. ФП Джефрі та трикутна ФП також дозволяють врахувати апріорну інформацію, отриману в результаті попереднього фундаментального та технічного аналізу.

Програмний продукт також виводить значення кожної функції правдоподібності у текстовий файл, що дозволяє розглянути їх графіки для кожного активу та для кожної ширини вікна.

Крім того, в інтерфейсі користувача виводяться графіки знайдених оцінок волатильності в залежності від ширини вікна, що використовувалося в методі. Візуальний аналіз графіків показав, що значення оцінок зростають зі збільшенням ширини вікна методу. Значення оцінок у кожному методі до деякої критичної ширини вікна майже не відрізняються, а потім сильно відхиляються від підсумкової оцінки.

Отже, використання розглянутих ММП в оцінюванні ризиків операцій на фондовому ринку дозволить:

1. Вивільнити частину зарезервованого капіталу для покривання збитків;

2. Врахувати невизначеність несуттєвого параметра – математичного сподівання;

3. Врахувати апріорну інформацію про фінансові інструменти.

ВИСНОВКИ

Магістерська дисертація присвячена оцінюванню ризиків операцій на фондовому ринку з використанням ММП.

У першому розділі структуризовано та систематизовано інформацію про фондовий ринок, аналіз та управління ризиками.

У другому розділі визначаються переваги та обмеження застосування різноманітних ММП. Також досліджено питання різних підходів до означення ФП. У дисертації ФП розглядається як функція, що залежить від невідомих параметрів ГС та дослідних даних (конкретної реалізації вибірки). Модифіковані ММП використовуються для того, щоб усунути несуттєві параметри – ті, які не оцінюються, але враховуються при оцінці інших параметрів.

Саме усунення несуттєвого параметра необхідно для оцінювання ризиків у задачі, що розглядається у третьому розділі. У цьому розділі подано, яким чином можна використати модифіковані ММП для оцінювання кількісних характеристик ризиків операцій на фондовому ринку. Для цього розроблено програмний продукт, який за допомогою VaR-підходу знаходить ймовірність ризику, час настання ризику, а також величину очікуваних та неочікуваних втрат. Величина втрат – це резервний капітал, який повинен бути доступний на випадок настання ризикової події.

Класичний підхід до оцінювання волатильності не враховує невизначеність несуттєвого параметра, тому оцінки втрат дещо завищені. Використання ММП з цією метою дозволяє побачити, що насправді до чверті коштів з резервного капіталу можуть бути вивільнені.

За рахунок підбору вагової функції (Джефрі, трикутної або будь-якої іншої) можна використати в методі апріорну інформацію про фінансовий інструмент, отриману в ході фундаментального та технічного аналізу.

Наукова новизна дисертації полягає у тому, що було запропоновано усунути несуттєвий параметр (математичне сподівання) за допомогою ММП в оцінюванні фінансових ризиків з використанням параметричного VaR-підходу.

Практична значущість роботи полягає в тому, що незважаючи на використання реальних даних (ціни закриття більш, ніж 60 фінансових інструментів, на Нью-Йоркській фондовій біржі за 10 років), отримані результати мають загальний характер і можуть бути застосовані для оцінювання ризиків у системах будь-якої природи.